# Cebirsel Eğrilerin Projektif Kapanışı

Projektif Geometrinin en ilginç yönlerinden biri de bazı düzlem eğrilerinin "asimptotik" olmasını güzel bir şekilde ifade etmeye olanak vermesidir. Bazan asimptotik eğriler için kullanılan "sonsuzda kesişirler" ifadesi projektif geometride gerçekten de doğru olur.

Bu durumu paralel doğrulardan zaten biliyoruz. Projektif düzlemin tanımından, (Öklid geometrisindeki) paralel doğrular (yeni eklediğimiz) "sonsuzdaki" bir noktada kesişiyorlar.

CEBİRSEL EĞRİLER (iki değişkenli bir polinomun bir sayıya eşitlenmesi ile tanımlanan eğri) için de sonsuzda uygun noktalar ekleyerek asimptot olmayı "sonsuzda" kesişme şekline getirebiliriz. Bunun için cebirsel bir eğrinin denkleminde, yeni bir değişken ekleyerek yapılacak, küçük bir düzenleme yeterli olacaktır. $P(x,y)$ sabit olmayan bir polinom olmak üzere, eğrinin denklemi $P(x,y)=0$ olsun. $Q(x,y,z)$ polinomu, $P(x,y)$ polinomunun her bir terimini $z$ nin uygun bir kuvveti ile çarparak, HER TERİMİ $P(x,y)$ nin derecesi ile aynı derecede olacak şekilde oluşturulan (HOMOJEN) polinom olsun (Daha hızlı tanım: $Q(x,y,z) = z^k P(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$, $k = P(x,y)$nin derecesi). Örneğin $P(x,y) = x^2y - x^2 + y$ için $Q(x,y,z) = x^2y - x^2z + yz^2$ olacaktır. Burada $Q(x,y,1) = P(x,y)$ olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca $Q(x,y,z)$ HOMOJEN bir polinomdur, yani, ($k$, $Q(x,y,z)$ nun derecesi=$P(x,y)$ nin derecesi olmak üzere) her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $Q(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k Q(x,y,z)$ olur.

$\mathfrak{C}$, $P(x,y)=0$ denklemi ile tanımlı düzlem eğrisi olsun. $\mathbb{R}^2$ yi $(x,y)$ ile $[x:y:1] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ile özdeşleştirerek $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ nin bir (önceki notlardaki $A$ olarak adlandırdığımız) alt kümesi olarak düşünebileceğimiz daha önce de belirtilmişti. Bu nedenle (bu özdeşleştirme ile) $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ varsayabiliriz. ($Q$ nun homojen olmasından dolayı, her $a,b,c \in \mathbb{R}$ ve her $\lambda \neq 0$ için)

$$Q(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow Q(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = 0$$

olduğunu gözlemleyelim. Bu da bize, her $[a:b:c] \in \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ için $Q(a,b,c)=0$ olup olmamasının noktanın homojen koordinatlarından bağımsız olduğunu söylüyor. Bu nedenle;

$$\overline{\mathfrak{C}} = \{[x:y:z] \mid Q(x,y,z) = 0\}$$

iyi tanımlıdır ve ($Q(x,y,1) = P(x,y)$ olduğu için) $\mathfrak{C} \subseteq \overline{\mathfrak{C}}$ dir. Basit bir işlem ile, $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{C}} \cap \{[x:y:z] \mid z \neq 0\}$ olduğu görülür. Yani, $\overline{\mathfrak{C}}$ deki yeni (ekstra) noktaların hepsi "sonsuz"dadır. $\overline{\mathfrak{C}}$ kümesine $\mathfrak{C}$ nin **projektif kapanışı** denir. ($\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ de tanımlanabilen "doğal" bir topolojiye göre $\overline{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{C}$ nin topolojik anlamda kapanışıdır.)

Öncelikle, bu tanım bir doğruya uygulandığında, daha önce (Öklid düzlemindeki) doğrulara "sonsuzda" bir nokta ekleme işlemi ile aynı sonucu verdiğini gösterelim. (Öklid koordinat düzleminde) $\ell : ax+by+c=0$ ($(a,b) \neq (0,0)$) doğrusu olsun. $P(x,y) = ax+by+c$ olduğundan, $Q(x,y,z) = ax+by+cz$ olur ve

$$\begin{aligned}\overline{\ell} &= \{[x:y:z] \mid ax+by+cz=0\} = \{[x:y:z] \mid ax+by+cz=0,\ z\neq 0\} \cup \{[x:y:z] \mid ax+by+cz=0,\ z=0\} \\ &= \ell \cup \{[-b:a:0]\}\end{aligned}$$

olur. Bu da, $\overline{\ell}$ nin, $\ell$ kümesine (sonsuzdaki) $[-b:a:0]$ noktasının eklenmesi ile oluştuğu, yani daha önce (Öklid düzlemindeki) bir doğrudan Projektif Düzlemde bir doğru oluşturulması ile $\ell$ den $\overline{\ell}$ in elde edilişinin aynı şey olduğunu gösteriyor.

## Örnekler:

1. $\mathfrak{C}$; $x^2+y^2-1=0$ eşitliği ile tanımlansın, bu durumda $Q(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ olur ve ($\mathbb{R}$ de) $Q(x,y,0)=0 \Leftrightarrow x=y=0$ olduğu için $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$ olur.

2. $\mathfrak{C}$; $y-x^2=0$ eşitliği ile tanımlansın, bu durumda $Q(x,y,z) = yz-x^2$ olur ve $Q(x,y,0)=0 \Leftrightarrow x=0$ olduğu için $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \cup \{[0:1:0]\}$ olur.

3. $\mathfrak{C}$; $y^2-x^2-1=0$ eşitliği ile tanımlansın, bu durumda $Q(x,y,z) = y^2-x^2-z^2$ olur ve $Q(x,y,0) = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$ olduğu için $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \cup \{[1:1:0],[-1:1:0]\}$ olur.

4. $\mathfrak{C}$; $x^3-xy^2-1=0$ eşitliği ile tanımlansın, bu durumda $Q(x,y,z) = x^3-xy^2-z^3$ olur ve $Q(x,y,0) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm y$ olduğu için $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \cup \{[0:1:0],[1:1:0],[-1:1:0]\}$ olur.

## Asimptotlar:

Aşağıda, $\ell$ doğrusu bir $\mathfrak{C}$ cebirsel eğrisinin bir asimptotu ise, $\overline{\ell}$ ile $\overline{\mathfrak{C}}$ nin sonsuzda kesiştiği, örneklerde gösterilecektir.

1. $\mathfrak{C} : xy - 1 = 0$ eşitliği ile tanımlanan hiperbolün asimptotları $x$ ve $y$ eksenleridir. Hiperbolün kapanışı $xy - z^2 = 0$ eşitliği ile tanımlanacağı için $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \cup \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0]\}$ bulunur. $\ell_1 = x$-ekseni $= \{(x, y) : y = 0\}$ için $\overline{\ell_1} = \ell_1 \cup \{[0 : 1 : 0]\}$ olup $\overline{\mathfrak{C}} \cap \overline{\ell_1} = \{[0 : 1 : 0]\}$ olur. Diğer asimptot ise $\ell_2 = y$-ekseni $= \{(x, y) : x = 0\}$ doğrusudur. $\overline{\ell_2} = \ell_2 \cup \{[1 : 0 : 0]\}$ bulunur. $\overline{\mathfrak{C}} \cap \overline{\ell_2} = \{[1 : 0 : 0]\}$ olur.

2. $\mathfrak{C} : y - x^2 = 0$ eşitliği ile tanımlanan parabolün asimptotu yoktur ama $y$-ekseninin (ve tüm düşey doğruların) sonsuzdaki noktası olan $[0 : 1 : 0]$ noktası $\overline{\mathfrak{C}}$ üzerindedir. **Yani eğrinin asimptotu olmayan bir doğru da, bu eğriyi sonsuzda kesebilir**.

3. $\mathfrak{C}_1 : \ x^3 - yx - y = 0$ eşitliği ile tanımlı eğri, $\mathfrak{C}_2 : \ x^2 - x + 1 - y = 0$ eşitliği ile tanımlı eğri olsun. Bu iki eğrinin asimptotik olduğu analiz yöntemleri ile görülür. $\overline{\mathfrak{C}_1}$, homojen koordinatları $x^3 - xyz - yz^2 = 0$ denklemini sağlayan noktalardır. Bu eğrinin sonsuzdaki yegane noktası ($z = 0$ yazarak bulunan) $[0 : 1 : 0]$ noktasıdır. $\overline{\mathfrak{C}_2}$, homojen koordinatları $x^2 - xz + z^2 - yz = 0$ denklemini sağlayan noktalardır. Bu eğrinin sonsuzdaki yegane noktası (yine $z = 0$ yazarak bulunan) $[0 : 1 : 0]$ noktasıdır. Dolayısıyla bu iki asiptotik eğri de sonsuzda kesişmektedir.