

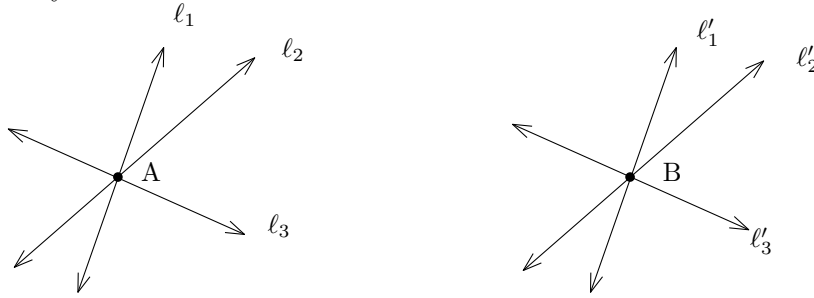
## PROJEKTİF (Düzlem) GEOMETRİ(Sİ):

Projektif geometri oluşturmada amaç, dış dünyanın gözümüze görüldüğü gibi, perspektife uygun, paralel doğruların “sonsuzda” kesiştiği bir geometri oluşturmaktır. Bu da, Öklid geometrisine yeni noktalar (bunlara sonsuzdaki noktalar denir) ekleyip, doğru tanımında da küçük bir değişiklik yaparak başarılabilir. Bu geometrinin tam bir aksiyom sistemini yazmaya çalışmayacağız. her aksiyom sisteminde; düzlemde iki (farklı) noktadan tek bir doğru geçmesi ve (düzlemde) farklı iki doğrunun tek noktada kesişmesi (temel) aksiyomları mutlaka bulunur. Genellikle, bu aksiyomlara, dejenere durumları önlemek amacıyla, bir kaç aksiyom daha eklenir.

### Projektif Geometrinin (nokta ve doğrularının) Öklid Geometrisinden (geometrik olarak) oluşturulması:

Öklid geometrisinde paralel (aynı düzlemde ama kesişmeyen) doğrular var olduğu için, düzlemin noktalarına, bu doğruların kesişeceği yeni noktalar eklemek ve doğrularımıza da bu noktaları katmak gerekir.

Öklid geometrisinde bir nokta seçelim, bu noktadan geçen tüm doğruları düşünelim. Parallellik aksiyomundan (ona eşdeğer olan Playfair aksiyomu bu işe daha uygundur) iki farklı nokta için oluşturacağımız bu kümeler arasında bire-bir (ve doğal) bir eşleme vardır (aşağıdaki şekle bakınız). Bu nedenle nokta seçiminin yapacağımız işlemde bir önemi yoktur.



$$\{A \text{ dan geçen doğrular} \} \leftrightarrow \{B \text{ den geçen doğrular} \}$$
$$\ell \mapsto \ell' \quad (\ell \parallel \ell' \text{ ise})$$

Projektif (Düzlem) Geometri(si)nin noktaları: Öklid geometrisinin noktaları + seçtiğimiz noktadan geçen her doğru için yeni bir nokta (bu yeni noktalara “sonsuzdaki” noktalar denir)

Projektif (Düzlem) Geometri(si)nin Doğruları: Öklid Geometrisindeki bir doğrunun noktalarının kümesine, bu doğruya paralel, yukarıda seçtiğimiz noktadan geçen (yegane) doğru için eklediğimiz (“sonsuzdaki”) noktadan oluşan küme + sonsuzdaki tüm noktaların kümesi (“sonsuzdaki doğru”).

Bu tanımlarla iki temel aksiyomun sağlandığı gösterilebilir.

## Projektif Geometrinin (nokta ve doğrularının) cebirsel olarak oluşturulması:

$\mathbb{R}$  gerçel sayılar cismini göstermek üzere  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{O}\}$  ( $\mathbf{O} = \mathbf{O}(0, 0, 0)$ ) kümesini düşünelim. ( $\mathbb{R}^3$  bir vektör uzayı olarak düşünüldüğünde,  $\mathbf{O}$  noktası 0 vektörüdür.) Bu küme üzerinde aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff x' = \lambda x, y' = \lambda y, z' = \lambda z \text{ o.ş bir } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ vardır.}$$

Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilir. Bu bağıntıya göre denklik sınıflarının kümesini  $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$  (bazıları  $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$  veya  $\mathbf{P}_{\mathbb{R}}^2$  kullanıyor) ile göstereceğiz. Bu kümeye projektif düzlem, elemanlarına da (projektif düzlemin) noktası diyeceğiz.

Projektif düzlemin noktaları ile  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki orijinden geçen doğrular arasında doğal bir eşleme ( $[(a, b, c)] \mapsto \{(a, b, c) \text{ ve } \mathbf{O} \text{ dan geçen doğru}\}$  eşlemesi) vardır. Bu, bize,  $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$  nin noktaları ile  $\mathbb{R}^3$  ün 1-boyutlu alt vektör uzayları arasında 1-1 bir eşleme verir.

Biz,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{O}\}$  nin (yukarıdaki denklik bağıntısına göre) denklik sınıfını  $[a : b : c]$  sembolü ile göstereceğiz. Gerekliğinde,  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{O}\}$  nin denklik sınıfını, kısaca,  $[v]$  ile göstereceğiz.  $a, b, c$  sayılarına  $[a : b : c]$  noktasının “homojen koordinatları” denir.

**Projektif Geometride Doğrular:**  $V, \mathbb{R}^3$  (vektör uzayının) 2-boyutlu bir alt uzayı olmak üzere:

$$\ell = \{[v] : v \in V, v \neq 0\} \subset \mathbb{R}\mathbf{P}^2$$

şeklindeki kümeler de projektif geometrimizin doğruları olacaktır.

(Bu tanıma göre, projektif düzlemdeki doğrular ile,  $\mathbb{R}^3$  (3 boyutlu) vektör uzayının 2-boyutlu alt uzayları arasında 1-1 bir eşleme vardır.)

Bu tanımlar ile, projektif geometrinin iki (temel) aksiyomunun sağlandığı (biraz lineer cebir kullanarak) kolayca gösterilir.

$\mathbb{R}\mathbf{P}^2$  de bir noktanın bir homojen koordinatı “iyi tanımlı” değildir (denklik sınıfından seçilen elemana bağlıdır), ama bir homojen koordinatın 0 olup olmaması “iyi tanımlıdır” (denklik sınıfından seçilen elemandan bağımsızdır). Bunu kullanarak, aşağıdaki ayrışım elde edilir:

$$\mathbb{R}\mathbf{P}^2 = A \cup B \text{ ( ayrık birleşim ) } \quad A = \{[x : y : z] : z \neq 0\}, \quad B = \{[x : y : 0] : (x, y) \neq (0, 0)\}$$

Aşağıdaki tartışmadan dolayı,  $B$  kümesinin elemanlarını “sonsuzdaki” noktalar olarak düşünürüz. Yukarıdaki doğru tanımına göre,  $B$  kümesi ( $V = \{(x, y, z) : z = 0\}$  2-boyutlu alt uzayına karşı gelen) doğrudur (bu nedenle, “sonsuzdaki doğru” olarak adlandırılır). Aşağıdaki teoremlerle bu kümeler daha iyi anlaşılır ve projektif geometrinin iki farklı (geometrik ve cebirsel) oluşturma şeklinin aslında “aynı” sonucu verdiği gösterilebilir.

**Teorem A:** Yukarıda tanımladığımız  $A$  kümesi ile  $\mathbb{R}^2$  (koordinat düzlemi) nin noktaları arasında aşağıdaki 1-1 eşleme vardır:

$$([x : y : z] \in A \text{ için}) [x : y : z] \mapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için}) (x, y) \mapsto [x : y : 1]$$

**Teorem B:** Yukarıda tanımladığımız  $B$  kümesi ile  $\mathbb{R}^2$  (koordinat düzlemi) deki orijinden geçen doğrular arasında aşağıdaki 1-1 eşleme vardır:

$$[a : b : 0] \mapsto -bx + ay = 0 \text{ doğrusu} \quad ax + by = 0 \text{ doğrusu} \mapsto [-b : a : 0]$$

Bu iki teorem, projektif düzlemi iki farklı (geometrik ve cebirsel) oluşturma yönteminin, aynı nokta kümesini verdiğini gösterir. İki tanımdaki noktaları bu şekilde özdeşleştirdiğimizde, doğru tanımlarının da “aynı” olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. (Daha açık şekilde: bir tanımdaki doğrunun noktaları bu eşlemeler altında diğer tanıma göre bir doğrunun noktalarına eşleşir.)

Koordinat düzlemindeki  $ax + by + c = 0$  ( $(a, b) \neq (0, 0)$ ) doğrusunun noktaları,  $(\mathbb{R}\mathbf{P}^2$  de  $[x : y : 1]$  şeklindeki noktalar ile eşleceği için)  $V = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\}$  alt uzayına karşı gelen doğrunun **A içinde kalan** noktalarına eşleşecektir.  $V$  nin tanımladığı doğrunun “sonsuzdaki” biricik noktası,  $[-b : a : 0]$  noktası olacaktır ve bu da  $ax + by = 0$  doğrusuna karşılık olarak eklediğimiz sonsuzdaki nokta ile eşleşecektir.

Aşağıdaki (ispatı kolay) önermeler ileride kullanılacaktır.

**Önerme:**  $P = [u]$ ,  $Q = [v]$  projektif geometride iki nokta olsun. O zaman:

$$P \neq Q \Leftrightarrow \{u, v\} \text{ lineer bağımsızdır}$$

Benzer şekilde

**Önerme:**  $P = [u]$ ,  $Q = [v]$ ,  $R = [w]$  projektif geometride üç nokta olsun. O zaman:

$$\{P, Q, R\} \text{ doğrusal değildir} \Leftrightarrow \{u, v, w\} \text{ kümesi lineer bağımsızdır}$$

**İspat:** Önermeye eşdeğer olan:

$$\{P, Q, R\} \text{ doğrusaldır} \Leftrightarrow \{u, v, w\} \text{ kümesi lineer bağımlıdır}$$

tanımlardan kolayca ispatlanır.

**Tanım:**  $\{P, Q, R\}$  projektif geometride, **doğrusal olmayan**, üç nokta ise bu kümeye bir üçgen deriz.

Bu tanım Öklid (ve hiperbolik) geometrisindeki tanımdan, en azından noktaların sıralı olmayışı bakımından, farklıdır. Bu farkın nedeni (sıranın neden önemli olmadığı) bir sonraki kısımdaki teoremlerden anlaşılacaktır.

### Projektif Dönüşümler

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineer ve tersinir bir dönüşüm olsun.  $\bar{T} : \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}\mathbf{P}^2$  dönüşümünü,  $\bar{T}[v] = [Tv]$ , ( $v \neq 0$ ) olarak tanımlayalım. Burada  $T$  nin lineer olmasını,  $\bar{T}$  nin iyi tanımlı olduğunu göstermek için kullanıyoruz. Ayrıca,  $T$  nin tersinir olması özelliğine de gerek duyuyoruz (niçin?).  $\bar{T}$  nin de tersinir olduğu, ( $T^{-1}$  in varlığını kullanarak), kolayca gösterilebilir. (Uyarı:  $T_1 \neq T_2$  olup  $\bar{T}_1 = \bar{T}_2$  olabilir.)

Bu şekildeki tanımlanan dönüşümlere **projektif dönüşüm** deriz.

**Teorem:** Projektif dönüşümler, bir doğrunun noktalarını (aynı veya başka) bir doğrunun noktalarına gönderir (kısaca “projektif dönüşümler **doğruları korur**” deriz).

**İspatın özeti:** Bir  $\ell$  doğrusu,  $\mathbb{R}^3$  ün, (2-boyutlu) bir  $V$  alt uzayına karşı gelsin. Lineer cebirden,  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineer ve tersinir olduğundan,  $T(V)$  de,  $\mathbb{R}^3$  ün 2-boyutlu bir alt uzayıdır.  $\bar{T}$  nin,  $\ell$  in noktalarını  $T(V)$  nin tanımladığı doğrunun noktalarına (1-1 ve örten bir şekilde) göndereceği çok kolay gösterilir.

**Teorem:** Projektif düzlemde  $P_1$ ,  $P_2$  **birbirinden farklı** iki nokta ve  $Q_1$ ,  $Q_2$  de **birbirinden farklı** iki nokta olsun. O zaman  $\bar{T}(P_1) = Q_1$ ,  $\bar{T}(P_2) = Q_2$  olacak şekilde (en az) bir  $\bar{T}$  projektif dönüşümü vardır.

**İspat:**  $P_1 = [u]$ ,  $P_2 = [v]$ ,  $Q_1 = [u']$ ,  $Q_2 = [v']$  olsun. Lineer cebirden,  $\{u, v, w\}$ ,  $\mathbb{R}^3$  ün bir bazı ve  $\{u', v', w'\}$ ,  $\mathbb{R}^3$  ün bir bazı olacak şekilde bir  $w, w' \in \mathbb{R}^3$  vardır.  $Tu = u'$ ,  $Tv = v'$ ,  $Tw = w'$  şeklindeki (biricik)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineer  $T$  dönüşümü tersinirdir ve

$\bar{T}$  istenen özelliktedir. Bu da bize, projektif dönüşümler tarafından korunan (**sabit olmayan**) bir uzaklık fonksiyonunun var olmadığını gösterir.

**Tanım:** (Projektif geometride üçgenlerin eşliği)  $\{P_1, P_2, P_3\}$  ve  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$  projektif düzlemde iki üçgen olsun. Eğer  $\bar{T}(P_1) = Q_1$ ,  $\bar{T}(P_2) = Q_2$ ,  $\bar{T}(P_3) = Q_3$  olacak şekilde tersinir (tekil olmayan) lineer bir  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dönüşümü varsa  $\{P_1, P_2, P_3\}$  ve  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$  üçgenleri eşitir (veya denktir) deriz.

**Teorem:** Projektif düzlem geometrisinde (daha genel olarak her projektif geometride) tüm üçgenler eşitir.

**İspat:** (Projektif Düzlem Geometrisi için)  $P_1 = [v_1]$ ,  $P_2 = [v_2]$ ,  $P_3 = [v_3]$  olsun. Önermeden,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  ( $\mathbb{R}^3$  3-boyutlu vektör uzayında) lineer bağımsız bir kümedir, dolayısıyla  $\mathbb{R}^3$  ün bir bazıdır.  $Q_1 = [w_1]$ ,  $Q_2 = [w_2]$ ,  $Q_3 = [w_3]$  olacak şekilde  $w_1, w_2, w_3$  vektörleri alalım. Lineer cebirden,  $Tv_1 = w_1$ ,  $Tv_2 = w_2$ ,  $Tv_3 = w_3$  olacak şekilde tek bir  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineer dönüşümü vardır. Hipotezimizden ve önermeden,  $\{w_1, w_2, w_3\}$  kümesi de lineer bağımsızdır. Bu da,  $T$  nin tersinir olması için yeterlidir.

Bu teoremden dolayı da, (**projektif dönüşümler tarafından korunan**) bir açı ölçümü ve (üçgenler için)(**sabit olmayan**) alan var olamaz.

**Teorem:** Projektif düzlemde  $\{P_1, P_2, P_3\}$  **doğrusal** ve **farklı** üç nokta olsun. O zaman  $\bar{T}(P_1) = P_1$ ,  $\bar{T}(P_2) = P_3$ ,  $\bar{T}(P_3) = P_2$  olacak şekilde (en az) bir  $\bar{T}$  projektif dönüşümü vardır.

**İspat:**  $P_1 = [u]$ ,  $P_2 = [v]$ ,  $P_3 = [w]$  ( $u, v, w \neq 0$ ) olsun. Yukarıdaki önermeden (ve noktaların farklı oluşundan)  $w = au + bv$  olacak şekilde ( $\{P_1, P_2, P_3\}$  farklı olduğundan, her ikisi de sıfırdan farklı)  $a, b \in \mathbb{R}$  vardır.  $\{u, v, t\}$ ,  $\mathbb{R}^3$  ün bir bazı olacak şekilde bir  $t \in \mathbb{R}^3$  seçelim.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Tt = t$ ,  $Tu = (-b)u$ ,  $Tv = w$  sağlayan (biricik) lineer dönüşüm olsun.  $\{t, u, w\}$ ,  $\mathbb{R}^3$  ü gerdiği için  $T$  tersinirdir.  $\bar{T}(P_1) = [Tu] = [(-b)u] = [u] = P_1$ ,  $\bar{T}(P_2) = [Tv] = [w] = P_3$ ,  $\bar{T}(P_3) = [Tw] = [T(au + bv)] = [aTu + bTv] = [a(-b)u + b(au + bv)] = [b^2v] = [v] = P_2$  olur.

Bu teorem, bize projektif geometride, (Öklid ve Hiperbolik geometrinin aksine) bir doğru üzerinde noktaları sıralayamayacağımızı (arada olmak kavramının var olmadığını, daha doğrusu bir projektif dönüşümün bu sıralamayı korumayabileceğini) gösterir.