Fibonacci Sayılarının bir Formülü

$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ (her $n \geq 0$ için) şeklinde tanımlanan Fibonacci sayıları için bir formül şöyle bulunabilir:
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ olsun. Tümevarımla kolayca, $F_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$ gösterilebilir.Bu eşitsizlikten, bu kuvvet serisi için (r: yakınsaklık yarıçapı) $r \geq \frac{3}{5} > 0$ olduğu görülür.

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} \text{ ve } x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
(x^2+x)f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = f(x) - x
\end{aligned}$$

olduğundan $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+x-1}$ olur. Bu rasyonel fonksiyonu basit kesirlere ayrıştıralım: ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: **Altın Oran** olmak üzere) $x^2 + x - 1 = (x+\phi)(x - \frac{1}{\phi})$ olduğundan

$$\frac{-x}{x^2+x-1} = \frac{A}{x+\phi} + \frac{B}{x - \frac{1}{\phi}}$$

eşitliğinde $A = \dfrac{-\phi^2}{1+\phi^2}$, $B = \dfrac{-1}{1+\phi^2}$ bulunur. $\dfrac{\phi}{1+\phi^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ dir. Düzenlenerek

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\phi}{1+\phi^2} \left(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1+\frac{x}{\phi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1+\frac{x}{\phi}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\phi x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{\phi} \right)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\phi^n - (-\phi^{-1})^n}{\sqrt{5}} \right) x^n
\end{aligned}$$

Buradan da, her $n \geq 0$ için

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi^{-1})^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

olduğu sonucuna varılır.
(Bu formülden

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

olduğu kolayca görülür.)