ASAL SAYILARIN SONSUZ OLDUĞUNUN TOPOLOJİK BİR İSPATI
(Harry Fürstenberg)
Proofs from THE BOOK (M. Aigner - G. M. Zeigner) Kitabından
Türkçesi: "Kitap'tan Deliller", İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları / Matematik ve Bilgisayar Dizisi

Teorem: Sonsuz tane (çoklukta) asal sayı vardır.
İspat:
Önce, $\mathbb{Z}$ üzerinde bir topoloji oluşturacağız ($a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere):

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\} \quad (N_{a,b} = a + b\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z})$$

olarak tanımlayalım. Örneğin $N_{a,0} = \{a\}$, $N_{0,b} = b\mathbb{Z}$, $N_{a,1} = \mathbb{Z}$ olur.

$$\mathfrak{B} = \{N_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b > 1\} \quad (\mathfrak{B} \subseteq 2^{\mathbb{Z}})$$

olsun. ($b > 1$ koşuluna dikkat ediniz!)

İddia 1: $\mathfrak{B}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde bir topolojinin bir bazıdır.
İspat: Bunu siz gösterin.

İddia 2: Bu (bazın tanımladığı) topolojiye göre:

(A) Boş olmayan her açık küme sonsuzdur (sonsuz sayıda elemana sahiptir)

(B) Her **temel açık** küme (yani her $N_{a,b}$ $\quad (b > 1)$) aynı zamanda kapalı bir kümedir.

İspat: Bu iddialardan ilkinin doğruluğu, $N_{a,b}$ nin ($b \neq 0$ olduğu için!) sonsuz oluşundan ve $\mathfrak{B}$ nin bu topolojiye bir baz oluşundan, aşikardır. İkincisinin ispatını yapalım.

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b} \quad (b > 1 \text{ iken})$$

oluşundan,

$$N_{a,b}^c = \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b} \quad (b > 1 \text{ iken})$$

olur. Dolayısıyla, her $a, b \in \mathbb{Z}$, $(b > 1)$ için, $N_{a,b}^c$ açık olup, ($b > 1$ için) $N_{a,b}$ kapalı bir kümedir.■

± 1 hariç her tamsayının en az bir asal böleni olduğu için:

$$\{-1, +1\}^c = \mathbb{Z} \setminus \{-1, +1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} \qquad (\mathbb{P} : \text{ asal sayılar kümesi})$$

olur.

$\mathbb{P}$ nin sonlu olduğunu varsayalım. Yukarıdaki eşitlikten, $\{-1, +1\}$ nin tümleyeni, sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi olup, kapalı bir küme olurdu. Dolayısıyla, $\{-1, +1\}$ kümesi, boş olmayan, sonlu bir açık küme olurdu. ÇELİŞKİ.■