MT 342 1998 Dönem Sonu Sınavı ÇÖZÜMLER

1. (a) $\{1,2,3\} = \mathbb{N} \cap (-\infty, 4)$ ve $(-\infty, 4) \in \tau_L$ olduğundan $\{1,2,3\} \in \tau_A$ olur. $\{2,3\} \in \tau_A$ kabul edip çelişki bulalım. $\{2,3\} = \mathbb{N} \cap U$ olacak şekilde $U \in \tau_L$ vardır. $U = \emptyset$, $U = \mathbb{R}$ için kolayca çelişki buluruz. $U = (-\infty, a)$ durumu için çelişki bulalım. $3 \in \mathbb{N} \cap U$ olacağı için $3 < a$ olmalıdır. Fakat bu durumda $1 \in U$ ve $1 \in A = \mathbb{N}$ olduğundan $1 \in \mathbb{N} \cap U = \{2,3\}$ olurdu çelişki. Öyleyse $\{2,3\} \notin \tau_A$ doğrudur.

   (b) $U = \{2, -3\}$ olsun. U, Y de (ayrık topolojide her küme açık olduğundan) açık bir kümedir. $f^{-1}(U) = \{2,3\}$ olduğu aşikardır. Yukarıda $\{2,3\} \notin \tau_A$ olduğu gösterildi. Bu da f nin $\tau_A - \tau^*$ sürekli olmadığını göstermek için yeterlidir.

2. (a) $p\,(1,3) \in U$, U açık olsaydı (çarpım topolojisinin tanımından) $1 \in V$, $3 \in W$ ve $V \times W \subseteq U$ olacak şekilde $V \in \tau_X = \tau_{cof}$ ve $W \in \tau_Y = \tau^*$ var olurdu. $V \neq \emptyset$ olduğu için $V^c = \mathbb{R} \setminus V$ sonlu olurdu. $\mathbb{R}$ sonsuz olduğu için $x > 3$ olacak şekilde (en az) bir $x \in V$ var olurdu. Dolayısıyla $(x,3) \in V \times W \subseteq U$ olurdu, ama $x > 3$ idi. Çelişki. Dolayısıyla U (çarpım topolojisine göre) açık küme olamaz. (p nasıl seçilirse seçilsin aynı şekilde çelişki elde edilebilir)

   (b) $F = \{(x,1) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{1\} \subset X \times Y$ için $F^c = X \times Y \setminus F = \mathbb{R} \times \{2,3\}$, $\mathbb{R} \in \tau_X = \tau_{cof}$ ve $\{2,3\} \in \tau^*$ olduğundan, çarpım topolojisinin tanımından, $F^c = X \times Y \setminus F = \mathbb{R} \times \{2,3\}$ açık bir kümedir. Kapalı küme tanımından, F bir kapalı kümedir.

3. (a) $U = (1,4) \in \tau^* = \tau_{std}$ olur. $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \in (1,4)\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 4\} = (-2,-1) \cup (1,2) \notin \tau$ olduğundan f, $(\tau - \tau^*)$ sürekli değildir.

   (b) $f(0) = 0$ dır $0 \in U$, $U \in \tau_{std}$ olsun. $0 \in V$, $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \tau$ bulmalıyız. Standart topolojinin tanımından, $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. $V = (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$ olsun. $0 \in V$, $V \in \tau$, $f(V) = [0, \varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$ olduğu aşikardır.

4. (a) Her $U \in \tau^*$ için $f^{-1}(U) \in \tau_X = \tau_{std}$ olduğunu gösterelim. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_{std}$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \tau_{std}$, $f^{-1}((-a,a)) = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \in (-a,a)\} = (-\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}) \in \tau_{std}$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla f, $(\tau_{std} - \tau)$ süreklidir.

   (b) f nin açık dönüşüm olmadığını göstermek yeterlidir. $U = (0,1) \in \tau_{std}$ olduğu aşikardır. $f(U) = \{x^3 : x \in (0,1)\} = (0,1) \notin \tau$ olduğundan f açık dönüşüm değildir.

5. (a)
   - Her $p, q \in \mathbb{R}^2$ $(p(x_1,y_1), q(x_2,y_2))$ için $|x_1 - x_2| \geq 0$ ve $2|y_1 - y_2| \geq 0$ olduğundan $d(p,q) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| \geq 0$ olacağı aşikardır. $d(p,q) = 0$ olsun. $|x_1 - x_2| = 0$ ve $2|y_1 - y_2| = 0$ olur. Buradan $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ yani $p = q$ elde edilir.
   - $d(q,p) = |x_2 - x_1| + 2|y_2 - y_1| = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| = d(p,q)$ olur.
   - $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ $(p(x_1,y_1), q(x_2,y_2), r(x_3,y_3))$ olsun. (mutlak değer ile ilgili üçgen eşitsizliğinden) $|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$ ve $|y_1 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$ olur. İkinci eşitsizliğin her iki tarafı 2 ile çarpılıp birinci eşitsizlik ile taraf tarafa toplanırsa:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| + 2|y_1 - y_3| &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + 2(|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|) \\ &= (|x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2|) + (|x_2 - x_3| + 2|y_2 - y_3|) \end{aligned}$$

     bulunur. $d(p,r) = |x_1 - x_3| + 2|y_1 - y_3|$ ve
     $d(p,q) + d(q,r) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + 2|y_2 - y_3|$ olduğundan
     $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q))$ gösterilmiş olur.

   (b) $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $d(p,p_0) < \delta$ olduğunda $d'(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız. ($p(x,y)$ olsun):

$$\begin{aligned} d'(f(p), f(p_0)) &= ||2x - y| - |-4|| \leq |(2x - y) + 4| \\ &= |2(x+1) - (y-2)| \leq 2|x+1| + |y-2| \leq 2(|x+1| + 2|y-2|) = 2d(p,p_0) < 2\delta \end{aligned}$$

   olduğundan $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ seçebiliriz. Bu seçimle $\delta > 0$ olur ve $d(p,p_0) < \delta$ iken $d'(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$ olduğu yukarıda gösterilmiştir.