MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
5 Eğri İntegralleri

Not: Yönü belirtilmeyen kapalı eğrileri pozitif yönlü varsayınız.

I. Aşağıda verilen f fonksiyonları ve C eğrileri için $\int_C f(z)\,dz$ integralini hesaplayınız:

(a) $f(z) = \frac{z+2}{2}$ olsun.
i) $C:\ z = 2e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$ ii) $C:\ z = 2e^{i\theta},\ \pi \le \theta \le 2\pi$

(b) $f(z) = \pi e^{\pi z},\ C$: Köşeleri $0, 1, 1+i, i$ olan karenin kenarları

(c) $f(z) = \begin{cases} 1, & y < 0 \\ 4y, & y > 0 \end{cases}$, $C : y = x^3$ üzerinde $z = -1-i$ den $z = 1+i$ ye kadar olan parça.

(d) $f(z) = z^{-1-i} = e^{(-1+i)\log z},\ |z| > 0,\ 0 < \arg z < 2\pi,\ C : |z| = 1$ (pozitif yönlendirilmiş)

(e) $f(z) = z^m \bar{z}^n,\ C : |z| = 1$ (pozitif yönlendirilmiş), $m, n \in \mathbb{Z}$

II. $C : z = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ C_0 : z = z_0 + Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$ ise $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z - z_0)\,dz$ olduğunu gösterin. ($f,\ C$ üzerinde parçalı sürekli)

III. $C : |z - z_0| = R$ (pozitif yönlü) olsun. $z = z_0 + Re^{i\theta},\ -\pi \le \theta \le \pi$ parametrik gösterimini kullanarak

(a) $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ ve $\int_C (z - z_0)^{n-1}\,dz = 0$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ olduğunu gösterin.

(b) $\int_C (z - z_0)^{a-1}\,dz = i\frac{2R^a}{a}\sin(a\pi)$ olduğunu gösterin. (Burada $0 \ne a \in \mathbb{R},\ R^a$ ve $(z - z_0)^a$ nın esas değerleri alınacaktır)

IV. İntegralin değerini hesaplamadan aşağıdakileri gösteriniz:

(a) $C : |z| = 2$ çemberinin $z = 2$ den $z = 2i$ ye kadar olan ve 1. bölgede kalan parçası ise $\left| \int_C \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \le \frac{\pi}{3}$

(b) $C : z = i$ den $z = 1$ e kadar olan doğru parçası, $\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \le 4\sqrt{2}$

(c) C : Köşeleri $0, 3i, -4$ olan üçgenin kenarları, $\left| \int_C (e^z - \bar{z})dz \right| \le 60$

(d) $C : |z| = R$ $(R > 2)$ çemberinin üst yarısı

i. $\left| \int_C \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4}\,dz \right| \le \frac{\pi R(R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$

ii. $\left| \int_C \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz \right| \le \pi \left(\frac{\pi + \ln R}{R} \right)$

V. C_1 : pozitif yönlü $|z| = 4$ çemberi ve C_2 : Kenarları $x = \pm 1,\ y = \pm 1$ doğruları üzerinde olan pozitif yönlü kare ise aşağıda verilen f fonksiyonları için neden

$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz$ olduğunu açıklayınız.

i) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$ ii) $f(z) = \dfrac{z+2}{\sin\frac{z}{2}}$ iii) $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$

VI. (a) $C_0 : |z-z_0| = R$ çemberi (pozitif yönlü) ise $\int_{C_0} (z-z_0)^{n-1} = \begin{cases} 0, & n = \pm 1, \pm 2, \cdots \\ 2\pi i, & n = 0 \end{cases}$ olduğunu gösteriniz.

(b) (a) daki sonuçtan yararlanarak, $C : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$ bölgesinin sınırı (pozitif yönlü) ise

$$\int_C (z-2-i)^{n-1}\, dz = \begin{cases} 0, & n = \pm 1, \pm 2, \cdots \\ 2\pi i, & n = 0 \end{cases}$$

olduğunu gösterin.

VII. C : Kenarları $x = \pm 2,\ y = \pm 2$ doğruları üzerinde olan kare ise aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

a) $\int_C \dfrac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\, dz$ b) $\int_C \dfrac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz$ c) $\int_C \dfrac{z\, dz}{2z+1}$

d) $\int_C \dfrac{\tan\frac{z}{2}}{(z-x_0)^2}\, dz,\ (-2 < x_0 < 2)$ e) $\int_C \dfrac{\cosh z}{z^4}\, dz$

VIII. (a) $C : |z-i| = 2$ ise i) $\int_C \dfrac{dz}{z^2+4} = ?$ ii) $\int_C \dfrac{dz}{(z^2+4)^2} = ?$

(b) $C : |z| = 3$ ve ($|w| \neq 3$ için) $g(w) = \int_C \dfrac{2z^2-z-2}{z-w}\, dz$ ise $g(2) = 8\pi i$ olduğunu gösterin, $|w| > 3$ iken $g(w)$ nedir?

(c) C basit kapalı bir çevre, f, C nin üzerinde ve içinde analitik ve z_0, C nin içinde bir nokta ise $\int_C \dfrac{f'(z)}{z-z_0} dz = \int_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$ olduğunu gösterin.

(d) C basit kapalı bir çevre ve $g(w) = \int_C \dfrac{z^3+2z}{(z-w)^3}\, dz$ ise

$$g(w) = \begin{cases} 6\pi i w, & w, C \text{ nin içinde ise} \\ 0, & w, C \text{ nin dışında ise} \end{cases}$$

olduğunu gösterin.

(e) $C : z = e^{i\theta},\ -\pi \le \theta \le \pi$ ve $a \in \mathbb{R}$ ise $\int_C \dfrac{e^{az}}{z}\, dz = 2\pi i$ olduğunu gösterin. Bunu kullanarak $\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta)\, d\theta = \pi$ formülünü elde ediniz.