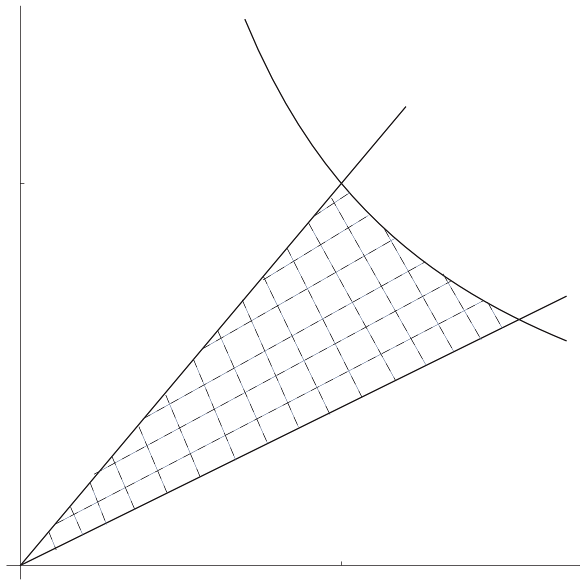
MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
EEE 203 COMPLEX CALCULUS
BAZI SORULARIN ÇÖZÜMÜ

1. $n \in \mathbb{N}$ ve $w \neq 1$, $w^n = 1$ ise $1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}$ ı hesaplamak.
$(1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$ olduğu daha önce gösterildi.)
Birinci Çözüm:
$1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}$
$= n(1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}) - (1+(1+w)+(1+w+w^2)+\cdots+(1+w+\cdots+w^{n-2}))$
$= n \cdot 0 - (\frac{1-w}{1-w} + \frac{1-w^2}{1-w} + \cdots + \frac{1-w^{n-1}}{1-w})$
$= \frac{-1}{1-w}((n-1) - (w + w^2 + \cdots + w^{n-1})) = \frac{1}{w-1}(n - (1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}))$
$= \frac{1}{w-1}(n-0) = \frac{n}{w-1}$
İkinci çözüm:
$z^{n+1} - 1 = (1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(z-1)$ özdeşliğinde her iki tarafın türevi alınarak
$(n+1)z^n = (1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1})(z-1) + (1 + z + z^2 + \cdots + z^n)$ elde edilir.
z yerine w konur ve $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$ ve $w^n = 1$ olduğu kulanılarak
$n + 1 = (1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1})(w-1) + 1$ oluşundan yine
$1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1} = \frac{n}{w-1}$ bulunur.

2. $|w| < 1$ olmak üzere:
$$|z| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| \leq 1$$
olduğunu gösteriniz.
$\Rightarrow$ yönü: $|z| \leq 1$ olsun.
$\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|^2 = \left(\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right)\overline{\left(\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right)} = \frac{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}{(1-\bar{w}z)(1-w\bar{z})} = \frac{z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w}}{1 - z\bar{w} - w\bar{z} + z\bar{z}w\bar{w}} =$
$\frac{|z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})}{1 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |z|^2|w|^2}$
$(1 - |z|^2)(1 - |w|^2) \geq 0$ oluşundan $|z|^2 + |w|^2 \leq 1 + |z|^2|w|^2$ elde edilir. Her iki taraftan $2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$ çıkarılarak
$$|z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq 1 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |z|^2|w|^2$$
bulunur. Bu da $\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|^2 = \frac{|z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})}{1 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |z|^2|w|^2} \leq 1$ olması demektir.
$\Leftarrow$ yönü: $z' = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$, $w' = -w$ olsun. $z = \frac{z'+w}{1+\bar{w}z'} = \frac{z'-w'}{1-\overline{w'}z'}$ bulunur.
$|w'| = |w| < 1$ ve $|z'| = \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| \leq 1$ olduğundan 1. kısımdan dolayı $|z| = \left|\frac{z'-w'}{1-\overline{w'}z'}\right| \leq 1$
elde edilir.

3. $w = z^{1/2}$ esas dal olmak üzere, $x = 0$, $y = x$ ve $y = 1$ doğruları ile sınırlanan bölgenin görüntüsünü bulunuz.
Çözüm:
Bölge ve eğriler I. Çeyrekte olduğundan sadece $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ sağlayan noktaları incelemek yeterlidir. $x = 0$ ($\mathrm{Arg}z = \frac{\pi}{2}$) yarı doğrusu, $\mathrm{Arg}w = \frac{\pi}{4}$ yarı doğrusuna, $y = x$ ($\mathrm{Arg}z = \frac{\pi}{4}$) yarı doğrusu ise $\mathrm{Arg}w = \frac{\pi}{8}$ yarı doğrusuna dönüşür. w düzleminde hangi eğrinin ($z = w^2$ dönüşümü altında) $y = 1$ doğrusuna dönüştüğünü bulalım. $z = w^2 = (u + iv)^2 = (u^2 - v^2) + i(2uv)$ olduğundan $uv = \frac{1}{2}$ eğrisi (hiperbolü) $y = 1$ doğrusuna dönüşür (iki kanadın herbiri $y = 1$

doğrusuna gönderilir). $\text{Arg}w = \frac{1}{2}\text{Arg}z \in (0, \pi)$ olduğundan $y = 1$ doğrusu $uv = \frac{1}{2}$ hiperbolünün I. çeyrekteki kanadına ($u, v > 0$ parçası) gönderilir.



4. $w = z^{1/2} = (r\ e^{i\theta})^{1/2} = \sqrt{r}\ e^{i\frac{\theta}{2}}$, $(r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$ ve $0 < a < b$ olmak üzere, $y^2 = 4a^2(x + a^2)$ ile $y^2 = 4b^2(x + b^2)$ parabolleri arasında kalan bölgenin görüntüsünü bulunuz.
Çözüm:
Önce w düzleminde hangi eğrilerin bu eğrilere dönüştüğünü bulalım.
$z = w^2 = (u + iv)^2 = (u^2 - v^2) + i(2uv)$ olduğundan $x = u^2 - v^2,\ y = 2uv$ olur.
w düzlemindeki eğrilerin denklemleri
$(2uv)^2 = 4a^2(u^2 - v^2 + a^2)$ ve $(2uv)^2 = 4b^2(u^2 - v^2 + b^2)$ olmalıdır. Bunlar sadeleştirilirse $(u^2 + a^2)(v^2 - a^2) = 0$ ve $(u^2 + b^2)(v^2 - b^2) = 0$ eğrileri bulunur. Bunlar da sırasıyla $v = \pm a$ ve $v = \pm b$ doğrularıdır. $a > 0,\ b > 0$ olduğundan ve $z^{1/2}$ nin argümenti $(0, \pi)$ arasında olması gerektiğinden $v = a$ ve $v = b$ doğruları verilen parabollerin görüntüleri olur. Paraboller arasındaki bölge de doğrular arasındaki bölgeye (sonsuz yatay şeride) gönderilir.

5. $w = \frac{1}{z}$ altında $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün dönüştüğü eğriyi bulunuz.
Çözüm:
$z = \frac{1}{w}$ olduğundan $x = \frac{u}{u^2+v^2},\ v = \frac{-v}{u^2+v^2}$ olur . Öyleyse $\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 - \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2 = 1$ olur. Bu denklem düzenlenirse $u^2 - v^2 = (u^2+v^2)^2$ elde edilir. Bu eğriyi Kutupsal koordinatlarda $(u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta)$ yazalım:

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^4$$

denklemi düzenlenirse $r^2 = \cos 2\theta$ eğrisi (Bernoulli nin Lemniskatı) olduğu görülür.