GENELLEŞTİRİLMİŞ STOKES TEOREMİNİN İSPATI

Doğan DÖNMEZ

Önce, teoremin özel bir durumda doğru olduğunu ispatlayacağız. Genel durum daha sonra ispatlanacaktır.

ÖZEL DURUM:

$\imath : \mathbb{I}^k \to \mathbb{R}^k, \quad \imath(t_1, t_2, \ldots, t_k) = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ (Kısaca $x_i = t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$) olsun.
$f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, (tüm kısmi türevleri sürekli olan) k değişkenli bir fonksiyon olmak üzere:

$$\omega = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k \quad (\widehat{\ } \quad \text{(şapka) işareti o terimin var olmadığını gösteriyor)}$$

olsun.

$$\begin{aligned} d\omega &= (df) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k) \\ &= (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \end{aligned}$$

olur. (Bu $\imath$ için) $\dfrac{\partial (f \circ \imath)}{\partial t_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \circ \imath$ olduğundan

$$\imath^*(d\omega) = (-1)^{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \imath \right) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k = (-1)^{j-1} \frac{\partial (f \circ \imath)}{\partial t_j} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$$

$$\text{Bunun sonucunda} \quad \phi_k(\imath^*(d\omega)) = (-1)^{j-1} \frac{\partial (f \circ \imath)}{\partial t_j}$$

olur. Diferansiyel-İntegral Hesabın Temel Teoreminden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \imath)}{\partial t_j}(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_k)\, dt_j &= (f \circ \imath)(t_1, \ldots, 1, \ldots, t_k) - (f \circ \imath)(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_k) \\ &= f(t_1, \ldots, 1, \ldots, t_k) - f(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_k) \end{aligned}$$

olur. Ardışık integrali hesaplarken (sınırlar sabit olduğu için istediğimiz sırada hesaplayabiliriz) önce t_j değişkenine göre integral alınırsa:

$$\begin{aligned} \int_\imath d\omega &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \imath)}{\partial t_j}(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_k)\ dt_1 \cdots dt_k \\ &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial (f \circ \imath)}{\partial t_j}(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_k)\, dt_j \right) dt_1 \cdots \widehat{dt_j} \cdots dt_k \\ &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(f(t_1, .., t_{j-1}, 1, t_{j+1}, .., t_k) - f(t_1, .., t_{j-1}, 0, t_{j+1}, .., t_k) \right) dt_1 \cdots \widehat{dt_j} \cdots dt_k \end{aligned}$$

olur.
$\partial\imath = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\imath_i^1 - \imath_i^0\right)$ ve $\imath_i^\epsilon(t_1,\ldots,t_{k-1}) = \imath(t_1,\ldots,t_{i-1},\epsilon,t_i,\ldots,t_{k-1}) = (t_1,\ldots,t_{i-1},\epsilon,t_i,\ldots,t_{k-1})$
$(\epsilon = 0,1)$

Bunun sonucunda (x_i sabit iken $dx_i = 0$ olduğundan) $\quad (\imath_i^\epsilon)^*\,\omega = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ f(t_1,\ldots,\epsilon,\ldots,t_{k-1})\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_{k-1} & i = j \end{cases}$

$(\epsilon = 0,1)$ olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\imath}\omega &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\int_{\imath_i^1}\omega - \int_{\imath_i^0}\omega\right) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\int_{\mathbb{I}^{k-1}}(\imath_i^1)^*(\omega) - \int_{\mathbb{I}^{k-1}}(\imath_i^0)^*(\omega)\right) = (-1)^{j-1}\left(\int_{\imath_j^1}\omega - \int_{\imath_j^0}\omega\right) \\
&= (-1)^{j-1}\int_0^1\cdots\int_0^1 \left(f(t_1,\cdots,t_{j-1},1,t_j,\cdots,t_{k-1}) - f(t_1,\cdots,t_{j-1},0,t_j,\cdots,t_{k-1})\right)dt_1\cdots dt_{k-1} \\
&= (-1)^{j-1}\int_0^1\cdots\int_0^1 \left(f(t_1,\cdots,t_{j-1},1,t_{j+1},\cdots,t_k) - f(t_1,\cdots,t_{j-1},0,t_{j+1},\cdots,t_k)\right)dt_1\cdots\widehat{dt_j}\cdots dt_k \\
&= \int_\imath d\omega
\end{aligned}$$

olur.
(Tanımından görüldüğü gibi) $\int_{\partial\imath}(\omega_1+\omega_2) = \int_{\partial\imath}\omega_1 + \int_{\partial\imath}\omega_2$ ve $\int_\imath d(\omega_1+\omega_2) = \int_\imath d\omega_1 + \int_\imath d\omega_2$ olduğundan ω', çok terimli (bileşenlerinin kısmi türevleri sürekli) bir $(k-1)$ form olduğunda da, yine

$$\int_{\partial\imath}\omega' = \int_\imath d\omega' \tag{1}$$

olur.

GENEL DURUM:

$\sigma : \mathbb{I}^k \to \mathbb{R}^m$ bir singüler k-simpleks; ω, $\mathbb{R}^m$ de, tüm bileşenlerinin tüm kısmi türevleri sürekli olan, bir $k-1$ form olsun. ($\imath$ yukarıdaki k-simpleks olmak üzere) $\sigma = \sigma\circ\imath$ olduğu aşikardır. $\omega' = \sigma^*\omega$ olsun. $\omega' \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k)$ dır. Problemlerdeki $d(\sigma^*\omega) = \sigma^*(d\omega)$ ve (aşikar olan) $(\sigma\circ\imath)^* = \imath^*\circ\sigma^*$ eşitliklerini kulanılarak

$$\begin{aligned}
\int_\sigma d\omega &= \int_{\mathbb{I}^k}\phi_k(\sigma^*\omega) = \int_{\mathbb{I}^k}\phi_k((\sigma\circ\imath)^*(d\omega)) = \int_{\mathbb{I}^k}\phi_k(\imath^*(\sigma^*(d\omega))) = \int_{\mathbb{I}^k}\phi_k(\imath^*(d(\sigma^*\omega))) \\
&= \int_{\mathbb{I}^k}\phi_k(\imath^*(d\omega')) = \int_\imath d\omega' \qquad (2)
\end{aligned}$$

bulunur. Her $1 \leq i \leq k$ ve $\epsilon = 0,1$ için $\sigma_i^\epsilon = \sigma\circ\imath_i^\epsilon$ olduğu (tanımlarından) görülür. Bu nedenle, yukarıda gösterildiği gibi, her $1 \leq i \leq k$ ve $\epsilon = 0,1$ için

$$\int_{\sigma_i^\epsilon}\omega = \int_{\mathbb{I}^{k-1}}\phi_{k-1}((\sigma\circ\imath_i^\epsilon)^*\omega) = \int_{\mathbb{I}^{k-1}}\phi_{k-1}((\imath_i^\epsilon)^*(\sigma^*\omega)) = \int_{\imath_i^\epsilon}\sigma^*\omega = \int_{\imath_i^\epsilon}\omega'$$

olur. Bundan dolayı

$$\int_{\partial\sigma}\omega = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\int_{\sigma_i^1}\omega - \int_{\sigma_i^0}\omega\right) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\int_{\imath_i^1}\omega' - \int_{\imath_i^0}\omega'\right) = \int_{\partial\imath}\omega' \tag{3}$$

elde edilir. (ω' ın bileşenlerinin kısmı türevleri sürekli olduğu için) (1), (2) ve (3) eşitliklerinden:

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$$

olduğunun ispatı tamamlanmış olur.