MT 242 Analiz 4 Sorular 1

1 Süreklilik

1. $a < b < c$ olsun. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ve $g : [b, c] \to \mathbb{R}$ iki sürekli fonksiyon ve $f(b) = g(b)$ olsun. $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ g(x) & x \in [b, c] \end{cases}$$
ise h fonksiyonunun $[a, c]$ de sürekli olduğunu kanıtlayınız.

2. $f : A \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon $c \in A$ ve $f(c) > 0$ olsun. Bir $\delta > 0$ için $x \in A \cap V_\delta(c)$ (yani $|x - c| < \delta$ ve $x \in A$) ise
$$f(x) > \frac{1}{2} f(c) > 0$$
olduğunu kanıtlayınız. (Yani c nin bir komşuluğunda $f > 0$ dır.)

3. $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) > 0$ ise bir $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq \alpha$ $(\forall x \in [a, b])$ olduğunu kanıtlayınız.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon ve $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ olsun. Eğer $(a_n) \subseteq S$ bir dizi ve $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ ise $a \in S$ olduğunu kanıtlayınız.

5. $\emptyset \neq D \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer $D' = A$ ise D ye A da yoğundur denir. ($D' = A \iff$ Her $a \in A$ ve her $\delta > 0$ için $D \cap V_\delta(a) \setminus \{a\} \neq \emptyset$ olmasıdır.)
   (a) $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli, D kümesi A da yoğun, ve her $d \in D$ için $f(d) = 0$ ise her $x \in A$ için $f(x) = 0$ (yani $f = 0$) olduğunu kanıtlayınız.
   (b) $f, g : A \to \mathbb{R}$ sürekli, D kümesi A da yoğun, ve her $d \in D$ için $f(d) = g(d)$ ise her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ (yani $f = g$) olduğunu kanıtlayınız.

6. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$ koşulunu sağlasın. f fonksiyonu $x = 0$ da sürekli ve $a = f(1)$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax$ olduğunu gösteriniz.

7. Sıfırdan farklı bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) f(y)$ koşulunu sağlasın. f fonksiyonu $x = 0$ da sürekli ve $a = f(1)$ ise $0 < a$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = a^x$ olduğunu gösteriniz.

8. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sürekli, $0<\alpha<1$ olsun. $f(0)=f(1)$ ise
$$f(\alpha c)=f((1-\alpha)c+\alpha)$$
olacak şekilde bir $c\in[0,1]$ olduğunu kanıtlayınız.

9. $0<\alpha\in\mathbb{R}$, $1<n\in\mathbb{N}$ bir tek pozitif tam sayı, ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$$f(x)=x^n+\alpha x^{n-1}+1$$
olsun. f nin $(-1-\alpha,0)$ da bir kökü olduğunu gösteriniz.

10. $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve her $x\in[a,b]$ için $|f(z)|\le\dfrac{1}{2}|f(x)|$ olacak şekilde bir $z\in[a,b]$ bulunabiliyorsa bir $c\in[a,b]$ için $f(c)=0$ olduğunu gösteriniz.

11. $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve her $x\in[a,b]$ için $|f(x)|\le\frac{1}{2}|f(z)|$ olacak şekilde bir $z\in[a,b]$ bulunabiliyorsa her $x\in[a,b]$ için $f(x)=0$ olduğunu gösteriniz.

12. $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli, $f(a)<0<f(b)$ olsun. $W=\{x\in[a,b]:f(x)<0\}$ ve $w=\sup W$ ise $f(w)=0$ olduğunu gösteriniz.

13. $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve her $x\in[a,b]$ için $f(x)$ rasyonel ise f nin sabit olduğunu kanıtlayınız.

14. $I=[a,b]$, $f:I\to\mathbb{R}$ sürekli olsun. M ve m sayıları, sırasıyla f nin $[a,b]$ deki maksimum ve minimumu ise
$$M-m=\sup\{|f(y)-f(x)|:x,y\in I\}$$
olduğunu gösteriniz.

15. $I=[a,b]$ ve $f:I\to\mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer f nin bir iç noktada maksimum veya minimum noktası varsa f nin I da $(1-1)$ olamayacağını kanıtlayınız.

16. $A=[a,b]$, $f:A\to\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $f_n:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Her $n\in\mathbb{N}$ için f_n sürekli ve
$$x\in A\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n}$$
ise f nin sürekli olduğunu kanıtlayınız.

17. $I=[a,b]$, $f:I\to\mathbb{R}$ ve f her değeri tam iki defa alsın. f nin her noktada sürekli olamayacağını kanıtlayınız.