MT 242 ANALİZ 4 FİNAL SINAV

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonun 0 da türevlenebildiğini, 1 de türevlenemediğini gösterin.

2. Bir I açık aralığında f türevlenebiliyor ve $\forall x \in I$ için $f'(x) \neq 0$ ise f nin I aralığında ya kesin artan ya da kesin azalan olduğunu gösteriniz.

3. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ de türevlenebilir ve $[0, \infty)$ da sürekli bir fonksiyon olsun. $f(0) = 0$ ve f', $(0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyon ise, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında artan olduğunu gösteriniz.

4. $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = xe^{-nx}$ olsun.

   (a) $\forall x \in [0, \infty)$ için $g(x) = \lim g_n(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

   (b) (g_n) dizisi g ye düzgün yakınsar mı? Neden? (Yol gösterme: $g_n(x) = xe^{-nx}$ fonksiyonunun maksimum değerini bulunuz ve sup (düzgün) normu kullanınız.)

5. $f_(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ fonksiyon dizisinin $[0, \frac{1}{2}]$ aralığında bir fonksiyona düzgün yakınsadığını gösteriniz ve daha sonra $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^n}\, dx$ limitini hesaplayınız.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{n}$ fonksiyonunun her noktada terim terime türevlenebildiğini gösteriniz. (Yol gösterme: Önce $\forall a > 0$ için $[-a, a]$ aralığında terim terime türevlenebilir olduğunu, teoremler kullanarak, gösteriniz.

NOT: **Bu derste** (Kolaylık olsun diye) $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ olarak kabul ediyoruz.