MT 241 ANALIZ III Ara Sınav 20 Kasım 2003
Öğrenci No Adı, Soyadı :

1. $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ olduğunu bildiğinizi varsayalım. (Bu eşitsizliği kanıtlamayınız.) Tümevarım kullanarak, her $2 \leq n \in \mathbb{N}$ için.
$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
olduğunu gösteriniz.

2. $\phi \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ ise $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ olarak tanımlanır. A, B üstten sınırlı ise $A + B$ nin de üstten sınırlı ve
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$
olduğunu kanıtlayınız.

3. $a \in (0, \infty)$ olduğuna göre (x_n) dizisi
$$x_1 = 2 \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$
olarak tanımlanan dizi olsun.. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{2} \leq x_n$

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \leq x_n$.

c) (x_n) yakınsaktır ve $\lim x_n = \sqrt{2}$ dir.

4. $\{x_n\}$ dizisi

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

olarak tanımlanan dizi olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 1$.

c) (x_n) yakınsaktır.