MT241 Analiz III, 14.01.2002

Öğrenci No, Adı Soyadı :........................ ....

Kurallar. Aşağıda birtakım önermeler ve bir takım eksiklerle bu önermelerin kanıtları verilmiştir. Kanıtlardaki boşlukları doldurunuz. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır. Aşağıda verilen (i),(ii) ve (iii) önermelerini kanıtlamaksızın kullanabilirsiniz.

i) $c \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \frac{[nc]+1}{n}$ koyalım. Her $n \in N$ için $c < x_n$ ve $\lim x_n = c$ dir.

ii) $0 < y$ ise $\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1$ dir.

iii) $x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $x \neq 2k\pi$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$ dir.

SORULAR

1. $A \subseteq R$, $c \in A'$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı ve $g : A \to \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ ise $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

   - $f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı olduğundan her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ olduğundan

     $$\ldots\ldots < |\ldots\ldots - \ldots\ldots.| < \ldots\ldots \text{ ve } x \in \ldots\ldots. \text{ olduğunda } |\ldots\ldots(\ldots\ldots)| < \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

     olacak şekilde bir ...... > ...... vardır. O halde

     $$\ldots\ldots < |\ldots\ldots - \ldots\ldots.| < \ldots\ldots \text{ ve } x \in \ldots\ldots. \text{ ise } |\ldots\ldots(\ldots\ldots)\ldots\ldots(\ldots\ldots)| < \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

     olur. Dolayısıyla $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$ dır.

2. $x \in \mathbb{R}$ ise

   $$f(x) = \begin{cases} x & x \text{ rasyonel} \\ 1 - x & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$$

   olarak tanımlansın. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$ dır. $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq \frac{1}{2}$ ise $\lim_{x \to c} f(x)$ limiti yoktur.

   - $x \in \mathbb{R}$ ise

     $$f(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} \ldots\ldots. - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} & x \text{ rasyonel} \\ \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} - \ldots\ldots. & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$$

     olduğundan

     $$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \ldots\ldots. - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \right|$$

     olur. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \ldots\ldots.$ alınırsa

     $$\ldots\ldots < \left| \ldots\ldots - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \right| < \ldots\ldots \text{ olduğunda } \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \ldots\ldots. - \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \right| < \ldots\ldots.$$

     olur. O halde $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$ dır. Şimdi $c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq \frac{1}{2}$ olsun. (x_n) dizisini (i) deki gibi tanımlayacak olursak, bu dizinin terimleri .... ve her $n \in \mathbb{N}$ için $c < x_n$ dir. Şimdi (y_n) dizisini

     $$y_n = \ldots\ldots\ldots\ldots.. + \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots.}{n}$$

     olarak tanımlayalım. O zaman bu dizinin terimleri .... ve her $n \in \mathbb{N}$ için .... < ....dir. Ayrıca

     $$\lim x_n = \ldots\ldots \text{ ve } \lim \ldots\ldots.... = \ldots\ldots$$

     Fakat

     $$\lim \ldots..(\ldots\ldots....) = \lim \ldots\ldots. = \ldots\ldots. \text{ ve } \lim \ldots..(\ldots\ldots....) = \lim \ldots\ldots\ldots\ldots.. = \ldots\ldots\ldots\ldots..$$

     ve $c \neq \frac{1}{2}$ olduğundan ..... $\neq$ ....dir. Dolayısıyla $\lim_{x \to c} f(x)$ limiti yoktur.

3. $A=(0,1)$ ve $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ olarak tanımlanan fonksiyon olsun.

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\in A}} f(x)=1$$

olduğunu kanıtlayınız.

- $x\in A$ ise $y=e^x>0$ olup (ii) den

$$\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\leq \cdots\cdots\cdots\cdots\leq\cdots\cdots\cdots\cdots$$

buradan

$$x\leq\cdots\cdots\cdots\cdots\leq\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad ((*))$$

elde edilir. $x\in A$ ise $x<1$ olup $e^x<e$ olur. O halde her $x\in A$ için

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\leq\cdots\cdots\cdots\cdots\leq e\cdots\cdots\cdots$$

Buradan öncelikle

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\in A}} e^{\cdots\cdots\cdots}=\cdots\cdots\cdots$$

olduğu görülür. $x\in A$ ise $0<x$ olup yukarıdaki (*) eşitsizliğini .... ile bölerek

$$\cdots\cdots\cdots<\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}<\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafında bulunan fonksiyonların .... için limiti .... dir. O halde

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 0\\ x\in A}} f(x)=1$$

olur.

4.

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ serisi $p>0$ ise yakınsak aksi halde ıraksaktır.
$b)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cos nx$ serisi her $x\in\mathbb{R}$ ve $k\in\mathbb{Z}$ için $x\neq 2k\pi$ ise yakınsaktır.
$c)$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi yakınsak ve $\lim na_n=0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)$ serisi de yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi ile ayni toplama sahiptir.

- $a)$ Bu seri $a_n=\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$ ile .... seridir.$0<p$ ise (a_n) dizisi .... ve .... = ... olduğundan seri .... seri testi nedeniyle yakınsaktır. $p\leq 0$ ise $\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\right|=n^{-p}$ dizisinin .... değildir. O halde seri ıraksaktır.
- $b)$ $a_n=\cos nx$ ve $b_n=$ .... $-$ .... koyalım. (iii) den dolayı (a_n) nin kısmi toplamlar dizisi (A_n) ise

$$|\cdots\cdots|\leq\frac{\cdots\cdots\cdots}{|\cdots\cdots\cdots|}$$

olduğundan (A_n) dizisi .... dır. Ayrıca

$$0\leq b_n=\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots}$$

dır. Buradan (b_n) dizisinin .... ve ....=............. olduğu kolayca görülür. O halde seri.......................... testi nedeniyle yakınsaktır.

- $c) A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ve $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(a_k - a_{k+1}\right)$ koyalım.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=0}^{n} ka_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1.}^{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} (\ldots\ldots - \ldots\ldots)\, a_{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k - (\ldots\ldots - \ldots\ldots))\, a_k - \ldots\ldots\ldots\ldots a_{\ldots\ldots+\ldots\ldots} \\
&= A_{\ldots\ldots\ldots\ldots} + a_{\ldots\ldots+\ldots\ldots} - (\ldots\ldots + \ldots\ldots)\, a_{\ldots\ldots+\ldots\ldots}
\end{aligned}
$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olduğundan $\lim a_n = 0$ dır. Ayrıca varsayım gereğince $\lim na_n = 0$ dır. O halde

$$\lim S_n = \lim A_n$$

elde edilir. Dolayısyla $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$ serisi de yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ile ayni toplama sahiptir