MT 241 Analiz 3 Sorular 8

limsup ve liminf üzerine sorular

1. (x_n) sınırlı bir dizi $X = \{x : \lim y_n = x$ o.ş. bir (y_n) alt dizisi vardır$\}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $m \leq x_n \leq M$ ise $X \subseteq [m, M]$ olduğunu gösterin.

2. * (x_n) sınırlı bir dizi $X = \{x : \lim y_n = x$ o.ş. bir (y_n) alt dizisi vardır$\}$ olsun. $\limsup(x_n) = \sup X$, $\liminf(x_n) = \inf X$ olarak tanımlanır. $\limsup x_n \in X$ ve $\liminf x_n \in X$ olduğunu gösterin.

3. * (x_n) sınırsız bir dizi $X = \{x : \lim y_n = x$ o.ş. bir (y_n) alt dizisi vardır$\} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. $\limsup(x_n) = \sup X$, $\liminf(x_n) = \inf X$ olarak tanımlanır. $\limsup x_n \in X$ ve $\liminf x_n \in X$ olduğunu gösterin.

4. ** (x_n) sınırlı bir dizi $X = \{x : \lim y_n = x$ o.ş. bir (y_n) alt dizisi vardır$\}$ olsun. X in kapalı bir küme olduğunu gösterin.

5. * (x_n) sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\liminf x_n = \limsup x_n = x$ ise $\lim x_n = x$ olduğunu gösterin.

6. * (x_n) sınırsız bir dizi olsun. Eğer $\liminf x_n = \limsup x_n = x$ ise $\lim x_n = x$ olduğunu gösterin.

7. (x_n) sınırlı bir dizi ve $\lim y_n = +\infty$ ($\lim y_n = -\infty$) olsun. Aşağıdakileri gösterin:
   a) $\lim(x_n + y_n) = +\infty$ ($\lim(x_n + y_n) = -\infty$) b) ($\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ ise) $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

8. ((x_n) dizisinin sınırlı ve sınırsız olduğu durumları ayrı ayrı inceleyerek) $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ olduğunu gösterin.

9. ((x_n) dizisinin sınırlı ve sınırsız olduğu durumları ayrı ayrı inceleyerek) $\liminf x_n = -\limsup(-x_n)$ olduğunu gösterin.

10. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olsun. $\limsup \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\liminf(x_n)}$ olduğunu gösterin. (İpucu: $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$ olduğu ve $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$ olduğu durumları ayrı ayrı inceleyin.)

11. (x_n) ve (y_n) iki sınırlı dizi olsun. Aşağıdakileri gösterin:

    a) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$ b) $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$