Doğal logaritma ve exp fonksiyonları

1. $x \in (0,\infty)$ olduğuna göre (x_n) dizisi

$$x_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right);\ n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanan dizi olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \le x_n$ dir.(Y. G. $b = x^{\frac{1}{n(n+1)}}$ koyunuz.)

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{x-1}{x} \le x_n \le x - 1$. (Y. G. $b = x^{\frac{1}{n}}$ koyunuz.) Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul $x = 1$ olmasıdır.

c) O halde (x_n) yakınsaktır. Bu limit $\ln x$ ile gösterilir. $\ln x$ sayısına x in *doğal logaritması* denir.

d. $\ln 1 = 0$ dir.

e. $\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x - 1$. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul $x = 1$ olmasıdır.

f. $x, y \in (0,\infty)$ olduğuna göre $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ve $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$ dir.

g. $x \in (0,\infty)$ ve $r \in Q$ olduğuna göre $\ln(x^r) = r\ln x$ dir.

h. $x, y \in (0,\infty)$ ve $x < y$ ise $\ln x < \ln y$ dir.

i. $(x_n) \subset (0,\infty)$ dizisi yakınsak ve $\lim x_n = x \in (0,\infty)$ ise $(\ln x_n)$ dizisi de yakınsak ve $\lim \ln x_n = \ln x$ dir.

j. $(x_n) \subset (0,\infty)$ ve $\lim x_n = \infty$ ise $\lim \ln x_n = \infty$ dur.

k. $(x_n) \subset (0,\infty)$ ve $\lim x_n = 0$ ise $\lim \ln x_n = -\infty$ dur.

2. (x_n) ve (y_n) dizileri

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ ve } y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};\ n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanıyor. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_{n+1} \le y_n$dir.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le x_{n+1}$ dir.

c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le y_n$ dir.

d) (x_n) ve (y_n) dizileri yakınsak ve $\lim x_n = \lim y_n$dir. Bu limit e ile gösterilir.

e) $2 < e < 3$ dür.(Y.G. $x_1 < e < y_5$)

3. $x \in \mathbb{R}$ olduğuna göre (x_n) dizisi

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n;\ n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanan dizi olsun. $m, k \in \mathbb{N}$ sayıları $-m < x < k$ olacak şekilde seçilsin. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a) Her $m \le n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le x_{n+1}$ dir.

b) Her $m \le n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le e^k$ dir. (Y. G. $1 + \frac{k}{n} \le (1 + \frac{1}{n})^k$ olup

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn}$$

olduğuna dikkat ediniz.)

c) O halde (x_n) yakınsaktır. Bu limit $\exp x$ ile gösterilir. Özel olarak $e = \exp 1$ dir.

d) Her $m \le n \in \mathbb{N}$ için $1 + x \le x_n \le \exp x$.

e. $\exp 0 = 1$ dir.

f. $x \in \mathbb{R}$ ise $1 + x \le \exp x$. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır.

g. $x, y \in \mathbb{R}$ olduğuna göre $\exp x \exp(-x) = 1$ dir. (Y.G. $1 - \frac{x^2}{n} \le \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \le 1$)

h. $x \in \mathrm{R}$ ise $\exp x > 0$ ve $\ln(\exp x) = x$ dir.

i. $x \in (0,\infty)$ ise $\exp(\ln x) = x$ dir.

j. $x \in \mathrm{R}$ ve $r \in Q$ olduğuna göre $\exp(rx) = (\exp x)^r$ dir.

k. $x,y \in \mathrm{R}$ ve $x < y$ ise $\exp x < \exp y$ dir.

l. $x,y \in \mathrm{R}$ olduğuna göre $\exp x \exp y = \exp(x+y)$ dir. (Y.G.

$$x + y = \ln(\exp x) + \ln(\exp y) = \ln(\exp x \exp y)$$

olduğuna dikkat ediniz.)

m. $x \in \mathrm{R}$ ise $|\exp x - 1| \le |x| \exp|x|$. (Y:G. Önce $0 < t$ ise $t \le e^t - 1 \le te^t$ olduğunu gösteriniz ve $1 - e^{-t} \le t \le te^t$ olduğuna dikkat ediniz.)

n. $(x_n) \subset \mathrm{R}$ dizisi yakınsak ve $\lim x_n = x$ ise $(\exp x_n)$ dizisi de yakınsak ve $\lim \exp x_n = \exp x$.

o. $(x_n) \subset \mathrm{R}$ ve $\lim x_n = \infty$ ise $\lim \exp x_n = \infty$ dur.

p. $(x_n) \subset \mathrm{R}$ ve $\lim x_n = -\infty$ ise $\lim \exp x_n = 0$ dır.

a tabanına göre logaritma ve üstel fonksiyon

1. $a \in (0,\infty)$ ve $x \in \mathrm{R}$ olduğuna göre

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

olarak tanımlayalım.

a) $x \in \mathrm{R}$ olduğuna göre $e^x = \exp x$ dir.

b) $r \in Q$ olduğuna göre daha önce tanımlanan a^r ile yeni tanımlanan a^r nin ayni sayılardır.

c) $a^0 = 1$ dir.

d) $x,y \in \mathrm{R}$ olduğuna göre $a^{x+y} = a^x a^y$ ve $(a^x)^y = a^{xy}$ dir.

2. $a \in (0,\infty)$, $a \neq 1$ ve $x \in (0,\infty)$ olduğuna göre

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

olarak tanımlayalım.

a) $\ln x = \log_e x$

b) $\log_a 1 = 0$ dır.

c) $x,y \in (0,\infty)$ olduğuna göre $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ve $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a x$ dir.

d) $x \in \mathrm{R}$ olduğuna göre $\log_a a^x = x$ dir.

e) $x \in (0,\infty)$ olduğuna göre $a^{\log_a x} = x$ dir.