MT 132 ANALİZ II ARA SINAV (2017) ÇÖZÜMLER

1. $f(x) = (2x+1)^{\frac{1}{x}}$ olsun. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ limitinde ∞^0 belirsizliği vardır. $\ln f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{x}$ dir.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{2x+1}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{2x+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$ olur. ($\frac{\infty}{\infty}$ durumu için L' Hospital in Kuralından)
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x+1)}{x} = 0$ olur. $e^x = \exp(x)$, 0 da sürekli olduğu için, bileşkenin limiti teoreminden, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$ olur. ($\mathbb{N} \subseteq (-\frac{1}{2}, +\infty) \subseteq T(f)$ de sağlandığı için) Fonksiyon Limiti/Dizi Limiti İlişkisi Teoreminden, $\lim \sqrt[n]{2n+1} = 1$ elde edilir.

2. $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\,(x+2)^n$ Kuvvet serisi -2 merkezli olduğu için -2 de (mutlak) yakınsaktır. $x \neq -2$ için $U_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,(x+2)^n$ olsun. ($x \neq -2$ olduğundan) Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \neq 0$ olur.

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{(2n+2)!|x+2|^{n+1}}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!|x+2|^n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}|x+2| = \frac{4n+2}{n+1}|x+2|, \quad \lim\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 4|x+2|$$

olur. Oran testinden, kuvvet serisi $4|x+2| < 1$ için mutlak yakınsak, $4|x+2| > 1$ için ıraksaktır. Yani, kuvvet serisi $|x+2| < \frac{1}{4}$ için mutlak yakınsak, $|x+2| > \frac{1}{4}$ için ıraksaktır. Bu da yakınsaklık yarıçapının $\frac{1}{4}$ olması demektir.

3. $f(x) = (1+8x^3)^{-\frac{1}{5}}$ dir. Binom Teoreminden, $|t| < 1$ için $(1+t)^{-\frac{1}{5}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{n} t^n$ olduğunu biliyoruz. $t = 8x^3 = (2x)^3$ alınırsa $|8x^3| < 1$ (yani $|x| < \frac{1}{2}$ için) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{n} 2^{3n}x^{3n}$ olur. K.S.T-T.T. Teoreminin bir sonucu olarak $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ dir. ($k = 3n = 60$ olması için $n = 20$ olmalıdır)

$$f^{(60)}(0) = \binom{-\frac{1}{5}}{20} 2^{60}60! = \frac{-\frac{1}{5}(-\frac{1}{5}-1)\cdots(-\frac{1}{5}-19)}{20!}2^{60}60! = 2^{60}\frac{1\cdot 6\cdot 11\cdots 96}{5^{20}}21\cdot 22\cdots 60 \text{ bulunur.}$$

4. (a) Eğrinin denklemini $\left(\dfrac{3x^4}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{y^3}{2}\right)^2 = 1$ şeklinde yazabiliriz. Buradan da, eğrinin $x > 0$ parçasının, $\frac{3x^4}{2} = \cosh t$, $\frac{y^3}{2} = \sinh t$, $\quad t \in \mathbb{R}$ şeklinde parametrize edilebileceği görülür. Düzenlenirse ($x > 0$ parçası)

$$x = \sqrt[4]{\frac{2\cosh t}{3}},\ y = \sqrt[3]{2\sinh t} \quad t \in \mathbb{R} \text{ şeklinde parametrize edilmiş olur}$$

(b) $m = \tan\phi = \tan(\alpha+\theta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta}$ olduğundan, $m = 0$ olması için, $\tan\alpha = -\tan\theta$ olduğu noktaları bulmalıyız. $\tan\alpha = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{1-\sin\theta}{-\cos\theta}$ olduğu için $\dfrac{1-\sin\theta}{-\cos\theta} = -\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ olur. Buradan da $2\sin\theta = 1$ den $\theta = \frac{\pi}{6}$ veya $\theta = \frac{5\pi}{6}$ olmalıdır (başka θ değerleri de vardır ama onlar, bu iki noktanın farklı kutupsal koordinatlarını verirler).

5. (a) Kısmi İntegrasyon ile ($u' = 1,\ v = \text{Arcsin}\,x$ olsun $u = x,\ v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olur):

$$\int \text{Arcsin}\,x\,dx = \int 1\cdot\text{Arcsin}\,x\,dx = x\,\text{Arcsin}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{u=1-x^2}{=} x\,\text{Arcsin}\,x + \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$
$$= x\,\text{Arcsin}\,x + \sqrt{u} + C = x\,\text{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(b) $x+1 = A(2x-4)+B$ $(A, B \in \mathbb{R})$ özdeşliğinden $A = \frac{1}{2},\ B = 3$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-4x+13}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-2)^2+3^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \frac{3}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,dx \overset{u=\frac{x-2}{3}}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \int \frac{du}{u^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+13) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

6. $9x^2+6x+5 = (3x+1)^2+2^2$ dir. $3x+1 = 2\tan\theta \quad (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ olsun.
$\sqrt{9x^2+6x+5} = 2\sec\theta,\ 3\,dx = 2\sec^2\theta\,d\theta,\ x+1 = \frac{2}{3}\tan\theta + \frac{2}{3}$ olur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt{9x^2+6x+5}}\,dx &= \int \frac{\frac{2}{3}\tan\theta + \frac{2}{3}}{2\sec\theta}\,\frac{2}{3}\sec^2\theta\,d\theta = \frac{2}{9}\int \sec\theta\tan\theta\,d\theta + \frac{2}{9}\int \sec\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{9}\left(\sec\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right) + C \\
&= \frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{9x^2+6x+5}}{2} + \ln\left|\frac{\sqrt{9x^2+6x+5}}{2} + \frac{3x+1}{2}\right|\right) + C
\end{aligned}$$

7. (Payın derecesi paydanın derecesinden küçük olduğu için) Basit kesirlere ayrıştıralım:

$$\frac{2x+1}{x^4-2x^3-3x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-3} \text{ (sağ taraf en küçük ortak paydada toplanırsa)}$$

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)(x-3)} = \frac{Ax(x+1)(x-3)+B(x+1)(x-3)+Cx^2(x-3)+Dx^2(x+1)}{x^2(x+1)(x-3)} \quad \text{elde edilir.}$$

Paydalar kısaltılarak $2x+1 = Ax(x+1)(x-3)+B(x+1)(x-3)+Cx^2(x-3)+Dx^2(x+1)$ bulunur.

$x=0$, $x=-1$ ve $x=3$ alınarak sırasıyla $B = -\dfrac{1}{3},\ C = \dfrac{1}{4},\ D = \dfrac{7}{36}$ ve daha sonra $A = -\dfrac{4}{9}$ bulunur

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^4-2x^3-3x^2}\,dx &= -\frac{4}{9}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{7}{36}\int \frac{1}{x-3}\,dx \\
&= -\frac{4}{9}\ln|x| + \frac{1}{3x} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{36}\ln|x-3| + C
\end{aligned}$$