2015 MT 132 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. $k_n = 2n$ olsun. $b_n = a_{k_n} = a_{2n} = \frac{2n}{4n+5}$ olur. Limit teoremlerinden, $\lim \frac{2n}{4n+5} = \lim \frac{2}{4+\frac{5}{n}} = \frac{1}{2}$ olur.
   $k_n = 2n+1$ olsun. $c_n = a_{k_n} = a_{2n+1} = \frac{-2n-1}{4n+7}$ olur. Limit teoremlerinden, $\lim \frac{-2n-1}{4n+7} = \lim \frac{-2-\frac{1}{n}}{4+\frac{7}{n}} = -\frac{1}{2}$ olur. $\left(\frac{(-1)^n n}{2n+5}\right)$ dizisi, farklı limitlere sahip olan iki alt diziye sahip olduğu için, (Alt Dizi Teoreminden) limiti yoktur.

2. $\sum \left|(-1)^n \tan \frac{1}{n}\right| = \sum \tan \dfrac{1}{n}$. $\lim \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ için $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\tan t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t}\frac{1}{\cos t} = 1$ olduğundan Fonksiyon Limiti/Dizi Limiti ilişkisi Teoreminden, $\lim \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ olur. Limit Karşılaştırma Testinden, $\sum \tan \frac{1}{n}$ serisi ile $\sum \frac{1}{n}$ serisi aynı karakterdedir. Harmonik seri ıraksak olduğu için $\sum \tan \frac{1}{n}$ serisi de ıraksaktır. Böylece $\sum (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ serisi mutlak yakınsak değildir.
   $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi (kesin) azalan, (her $n \in \mathbb{N}$ için) $\frac{1}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$ ve tan, $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında (kesin) artan (çünki türevi pozitif) olduğu için $\left(\tan \frac{1}{n}\right)$ (kesin) azalan bir dizidir. $\lim_{x\to+\infty} \tan \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \tan t = 0$ olduğu için Fonksiyon Limiti/Dizi Limiti ilişkisi Teoreminden, $\lim \tan \frac{1}{n} = 0$ olur. İşaret Değişimli Seri Teoreminden, $\sum (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ yakınsaktır. Sonuç olarak $\sum (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ serisi koşullu yakınsaktır.

3. $x = 0$ için seri (mutlak) yakınsaktır. $x \neq 0$ iken Oran Testi uygulayabiliriz $U_n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} x^n$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(2n+1)(2n+2)}|x| = \frac{27}{4}|x|$$

   olur. Oran testinden, Kuvvet serisi $\frac{27}{4}|x| < 1$ için mutlak yakınsak, $\frac{27}{4}|x| > 1$ için ıraksaktır. Bu da , kuvvet serisinin $|x| < \frac{4}{27}$ için mutlak yakınsak, $|x| > \frac{4}{27}$ için ıraksak olması demektir. Bu da yakınsaklık yarıçapının $\frac{4}{27}$ olması demektir.

4. $\sqrt[3]{x^2+4x+68} = \sqrt[3]{(x+2)^2+64} = \sqrt[3]{64((\frac{x+2}{8})^2+1)} = 4\sqrt[3]{(\frac{x+2}{8})^2+1} = 4((\frac{x+2}{8})^2+1)^{\frac{1}{3}}$
   Binom teoreminden, $(1+t)^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} t^n \quad (r=1)$ olduğundan, $t = \left(\frac{x+2}{8}\right)^2$ alarak:

$$\sqrt[3]{x^2+4x+68} = 4\left(\left(\frac{x+2}{8}\right)^2+1\right)^{\frac{1}{3}} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \left(\frac{x+2}{8}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{(x+2)^{2n}}{2^{6n-2}}$$

   BinomTeoreminden, ($\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ olduğu için) kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olur. Bu nedenle, yeni kuvvet serisi, $\left|\left(\frac{x+2}{8}\right)^2\right| < 1$ için mutlak yakınsak, $\left|\left(\frac{x+2}{8}\right)^2\right| > 1$ için ıraksaktır. Bu eşitsizlikler düzenlendiğinde, kuvvet serisinin $|x+2| < 8$ için mutlak yakınsak, $|x+2| > 8$ için ıraksak olduğu sonucu çıkar. Bu da, yakınsaklık yarıçapının 8 olması demektir.

5. (a) $4x^2 - 4xy + 2y^2 + 4y = (2x-y)^2 + (y+2)^2 - 4$ olduğu için verilen eğrinin denklemi $(2x-y)^2 + (y+2)^2 = 4$, eşdeğer olarak, $(\frac{2x-y}{2})^2 + (\frac{y+2}{2})^2 = 1$ şekline getirilebilir.
   $\frac{2x-y}{2} = \cos t,\ y+2 = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ şeklinde parametrize edilebilir. Düzenlenirse,
   $x = \sin t + \cos t - 1,\ y = 2\sin t - 2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ şekline gelir.

(b) $\tan\alpha = \frac{r}{r'} = \frac{\sin(2\theta)}{2\cos(2\theta)} = \frac{1}{2}\tan(2\theta) = \frac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ olur. Yatay teğet için $m = \tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta} = 0$ olmalıdır. Bu da ancak $\tan\theta = -\tan\alpha$ yani $\tan\theta = \frac{-\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ iken olur. Bu denklem düzenlendiğinde, $\tan\theta(\tan^2\theta - 2) = 0$ şekline gelir. Bu denklemin $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki tek çözümü $\theta = \operatorname{Arctan}\sqrt{2}$ dir.

6. (a) $u = \operatorname{Arcsin} x,\ v' = 1$ seçerek Kısmi İntegrasyon kullanalım. $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ v = x$ olur.

$$\int \operatorname{Arcsin} x\,dx = x\operatorname{Arcsin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{u=1-x^2}{=} x\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(b) $\frac{d}{dx}(4x^2+4x+2) = 8x+4$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int \frac{8x+5}{4x^2+4x+2}\,dx &= \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+2}\,dx + \int \frac{1}{4x^2+4x+2}\,dx\\ &\overset{u=4x^2+4x+2}{=} \ln|4x^2+4x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x+1)^2+1}\,dx\\ &\overset{u=2x+1}{=} \ln(4x^2+4x+2) + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(2x+1) + C\end{aligned}$$

7. $x^2+4x+13 = (x+2)^2+3^2$ olur. $u = x+2 = 3\tan\theta$ $(\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ olsun.
$\sqrt{(x+2)^2+3^2} = 3\sec\theta$ ve $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$ olur. Bu nedenle (indirgeme formülünü de kullanarak):

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(x+2)^2+3^2}\,dx &= 9\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{9}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \int \sec\theta\,d\theta\right)\\ &= \frac{9}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left((x+2)\sqrt{x^2+4x+9} + 9\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+9}}{3} + \frac{x+2}{3}\right|\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\left((x+2)\sqrt{x^2+4x+9} + 9\ln(\sqrt{x^2+4x+9} + x + 2)\right) + C\end{aligned}$$

elde edilir.