1. (a) ($x_1 > 0$ olduğu açıktır, tümevarımla) her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olduğu verildiğine göre her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < x_n < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olur. Bu da (x_n) dizisinin sınırlı olması demektir. $n \in \mathbb{N}$ olsun, $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{1+x_n} - x_n = \frac{1-x_n-x_n^2}{1+x_n}$ olur. x^2+x-1 polinomunun kökleri $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ve (her $n \in \mathbb{N}$ için) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x_n < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan $1 - x_n - x_n^2 > 0$ olur. Dolayısıyla ($1 + x_n > 0$ olduğu da kullanılarak), her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} - x_n > 0$ olur. Bu da, dizinin kesin artan olduğu anlamına gelir.

   (b) Monoton Yakınsaklık Teoreminden, (x_n) dizisi yakınsaktır. $\lim x_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) olsun. Alt Dizi Teoreminden $\lim x_{n+1} = L$ ve (her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ olduğundan $L \geq 0$ olur.) Limit Teoreminden $\lim \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+L}$ olur. Limitin tekliğinden $L = \frac{1}{1+L}$ buradan $L^2 + L - 1 = 0$, $L = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ veya $L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ olmalıdır. (Önceden belirtildiği gibi, $L \geq 0$ olmak zorunda olduğundan,) $L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ bulunur.

2. (a) $\sum \left|(-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ olur. (Bileşkenin Limiti teoremi veya Değişken Değişikliği teoremi Kullanarak) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1$ olduğundan,Fonkisyon Limiti/Dizi Limiti ilişkisi Teoreminden, $\lim \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ olur. Limit Karşılaştırma Testinden, pozitif terimli $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ ve $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ serileri aynı karakterdedir. p-serisi teoreminden, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi ($p = \frac{1}{2} \leq 1$ olduğundan) ıraksaktır. Bu nedenle, Limit Karşılaştırma Testinden, $\sum \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ de ıraksaktır. Verilen dizi mutlak yakınsak değildir.

   (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ dizisi açıkça (kesin) azalandır. sin fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında kesin artan olduğundan ve $\frac{1}{n} \in (0,1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $\left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ dizisi (kesin) azalandır. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \sin \sqrt{t} = 0$ (Bileşkenin Limiti veya Değişken Değiştirme Teoreminden)olduğundan Fonksiyon Limiti/Dizi Limit İlişkisi Teoreminden, $\lim \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ olur. İşaret Değişimli Seri Teoreminden, $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi yakınsaktır.

   Sonuç: $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi koşullu yakınsaktır.

3. $x = 0$ için kuvvet serisi (0 merkezli olduğu için) (mutlak) yakınsaktır. $x \neq 0$ ve $U_n = \frac{(4n)!}{n!(3n)!}x^n$ olsun.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(n+1)(3n+1)(3n+2)(3n+3)}x = \frac{4(4n+1)(4n+2)(4n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}x$$

   Limit teoremlerinden $\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{256}{27}|x|$ olur. ($x = 0$ için serinin mutlak yakınsak olduğu da gözönüne alınarak) : $|x| < \frac{27}{256}$ için kuvvet serisi m. yakınsak, $|x| > \frac{27}{256}$ için kuvvet serisi ıraksaktır. Dolayısıyla yakınsaklık yarıçapı $\frac{27}{256}$ olarak bulunur.

4. $\sqrt[3]{x^2 - 4x + 68} = \sqrt[3]{(x-2)^2 + 8^2} = 4\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{8}\right)^2 + 1} = 4\sqrt[3]{1+t}$ ($t = \left(\frac{x-2}{8}\right)^2$). olur. Binom Teoreminden, $|t| < 1$ için $\sqrt[3]{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} t^n$ ($|t| > 1$ için seri ıraksaktır) olur. Böylece $\left|\left(\frac{x-2}{8}\right)^2\right| < 1$ için $\sqrt[3]{x^2 - 4x + 68} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \left(\frac{x-2}{8}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} \frac{1}{2^{6n-2}} (x-2)^{2n}$ olur ve $\left|\left(\frac{x-2}{8}\right)^2\right| > 1$ için Kuvvet serisi ıraksaktır. Bu da $|x-2| < 8$ için kuvvet serisinin yakınsak, $|x-2| > 8$ için ıraksak olması demektir. Öyleyse, kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı da 8 olur.

5. (a) $x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y = (2x+y)^2 + (y-1)^2 - 1$ olduğundan, eğri $(2x+y)^2 + (y-1)^2 = 1$ elipsidir. $2x + y = \cos t$, $y - 1 = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ olarak parametrize edebiliriz. Düzenlendiğinde $x = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t - 1)$, $y = \sin t + 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ olarak parametrize edilmiş olur.

(b) $\tan\alpha = \frac{r}{r'}$ den $\tan\alpha = -\frac{1}{2}\cot(2\theta)$ olur. $m = \tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\theta}$ oluşundan $\tan\theta+\tan\alpha = 0$ olmalıdır. $\tan\theta = \frac{1}{2\tan(2\theta)} = \frac{1-\tan^2\theta}{4\tan\theta}$ denklemi çözülerek $\tan\theta = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}$ bulunur. $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ oluşundan (ve Arctan ın tek fonksiyon oluşundan) $\theta = \pm\,\text{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur.

6. (a) Kısmi İntegrasyon ile yapabiliriz. $u(x) = \sinh^{-1}x,\ v'(x) = 1$ olsun. $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ olur, $v(x) = x$ alabiliriz.

$$\int \sinh^{-1}x\ dx = x\sinh^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

olur. $u = x^2+1$ değişken değişikliği yapılarak $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\ du = \sqrt{u}+C = \sqrt{x^2+1}+C$ bulunur. yerine yazılarak:

$$\int \sinh^{-1}x\ dx = x\sinh^{-1}x - \sqrt{x^2+1}+C$$

bulunur.

(b) $u = e^{2x},\ v' = \sin x$ alarak kısmi integrasyon uygulayalım. $u' = 2e^{2x},\ v = -\cos x$ olur.

$$\int e^{2x}\sin x\ dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\ dx$$

olur. $u = e^{2x},\ v' = \cos x$ olsun. ($u' = 2e^{2x},\ v = \sin x$ olur. Yine Kısmi İntegrasyon ile

$$\int e^{2x}\cos x\ dx = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\ dx$$

olur. yerine yazılarak

$$\int e^{2x}\sin x\ dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\ dx$$

$$\int e^{2x}\sin x\ dx = \frac{1}{5}\left(-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x\right) + C$$

elde edilir.

7. $\frac{2x+1}{x^4+4x^2}$ rasyonel fonksiyonunu basit kesirlere ayrıştıralım:

$$\frac{2x+1}{x^4+4x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$2x+1 = Ax(x^2+4) + B(x^2+4) + x^2(Cx+D)$$

özdeşliğinde $A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{4},\ C = -\frac{1}{2},\ D = -\frac{1}{4}$ bulunur.

$$\frac{2x+1}{x^4+4x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}{x^2+4}$$

$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C,\ \int \frac{1}{x^2}\ dx = \frac{-1}{x} + C,\ \int \frac{x}{x^2+4}\ dx \overset{u=x^2+1}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C, \int \frac{1}{x^2+4}\ dx \overset{u=\frac{x}{2}}{=} \frac{1}{2}\,\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ olduğundan

$$\int \frac{2x+1}{x^4+4x^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{2} + C$$

bulunur.