MT 131 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. $\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = n\tan\frac{1}{n}$ ve $\lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\cos t}\frac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan Fonksiyon Limiti/Dizi Limiti İlişkisi Teoreminden $\lim \frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ olur. Limit Karşılaştırma Testinden $\sum\tan\frac{1}{n}$ ile $\sum\frac{1}{n}$ aynı karakterdedir. $\sum\frac{1}{n}$ (Harmonik seri) ıraksaktır, dolayısıyla $\sum\tan\frac{1}{n}$ ıraksaktır.
$\sum(-1)^n\tan\frac{1}{n}$ mutlak yakınsak değildir.
(Başka bir çözüm: Her $n\in\mathbb{N}$ için $[0,\frac{1}{n})\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ olduğundan, ODT den $\tan\frac{1}{n} = \sec^2(c_n)\frac{1}{n}$ o. ş. $c_n\in(0,\frac{1}{n})$ sayıları vardır. $\sec^2 c_n \geq 1$ olduğu için (her $n\in\mathbb{N}$ için) $\tan\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n}$ olur. $\sum\frac{1}{n}$ (harmonik seri) ıraksak olduğundan, Karşılaştırma Testinden, $\sum\tan\frac{1}{n}$ de ıraksaktır)
$(\frac{1}{n})$ azalan bir dizi, $\frac{1}{n}\in(0,1]\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ve tan fonksiyonu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ aralığında artan olduğundan, $(\tan\frac{1}{n})$ azalan bir dizidir. $\lim\tan\frac{1}{n} = \lim_{x\to+\infty}\tan\frac{1}{x} = \lim_{t\to0^+}\tan t = 0$ olduğundan, İşaret Değişimli Seri Testinden, $\sum(-1)^n\tan\frac{1}{n}$ yakınsaktır.
Dolayısıyla $\sum(-1)^n\tan\frac{1}{n}$ Koşullu yakınsaktır.

2. $x=2$ için kuvvet serisi (mutlak) yakınsaktır. $x\neq 2$ için $U_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}(x-2)^n$ olsun ($n>0$ için $U_n\neq 0$ olur).
$\lim|\frac{U_{n+1}}{U_n}| = \lim\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2|x-2| = |x-2|$ olur. Oran Testinden, $|x-2|<1$ için kuvvet Serisi (mutlak) yakınsak, $|x-2|>1$ için kuvvet serisi ıraksaktır. $x=3$ için seri $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ olur. $\lim\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x^{\frac{3}{2}}} = 0$ ve $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($p=\frac{3}{2}>1$), p-serisi Teoreminden, yakınsaktır. Limit Karşılaştırma Testinden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ de yakınsaktır.

$x=1$ için kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2}$ şekline gelir. $|(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2}| = \frac{\ln n}{n^2}$ ve $\sum\frac{\ln n}{n^2}$ serisinin yakınsaklığı yukarıda gösterildiği için, (Mutlak Yakınsaklık Teoreminden) $\sum(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ yakınsaktır. Yakınsaklık Aralığı:$[1,3]$ olur.

3. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x)^2)^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan, Binom Teoreminden, $|x|<1$ için $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n}$ olur. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ olsun. K.S.T-T.T. Teoreminden, ($(-1,1)$ aralığında) $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n} = f'(x)$ olur. ODT den ($(-1,1)$ aralığında) $\operatorname{Arcsin} x = g(x)+C$ olur. $g(0)=0, \operatorname{Arcsin} 0 = 0$ olduğundan $C=0$ bulunur, Dolayısıyla ($(-1,1)$ aralığında)

$$\operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

olur. $2n+1=201$ için $n=100$ olacağından,
$f^{(201)}(0) = \binom{-\frac{1}{2}}{100}(-1)^{100}\frac{1}{201}(201)! = \binom{-\frac{1}{2}}{100}(200)!$ olur.
(Veya daha kısa olarak: $f^{(201)}(0) = f'^{(200)}(0)$ olduğundan, $f^{(201)}(0) = \binom{-\frac{1}{2}}{100}(200)!$ elde edilir.)

4. (a) $\tan\alpha = \frac{r}{r'} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta+\tan\theta$, $m = \tan\phi = \tan(\theta+\alpha) = \frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}$ olur. $m=0$ olması $\tan\theta = -\tan\alpha = -\sec\theta-\tan\theta$ yani $2\tan\theta = -\sec\theta$ yani $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ olması ile mümkündür. Bu da $\theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ iken sağlanır. $\theta = -\frac{\pi}{6}$ veya $\theta = \frac{7\pi}{6}$ olduğunda teğet yatay olacaktır.

   (b) $x^2+2xy+5y^2=1$ elipsini $(x+y)^2+(2y)^2=1$ şeklinde yazalım.
   $x+y=\cos t,\ 2y=\sin t,\ 0\leq t\leq 2\pi$ alabiliriz.
   Bu da $x=\cos t-\frac{1}{2}\sin t,\ y=\frac{1}{2}\sin t, 0\leq t\leq 2\pi$ olmasına eşdeğerdir.

5. $z = \tan\frac{\theta}{2}$ olsun. $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$ olur.

$$\int \frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = \int \frac{2}{9+z^2}dz = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2}\,dz = \frac{2}{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{z}{3} + C = \frac{2}{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{3} + C$$

6. $x^2+2x+5 = (x+1)^2+2^2$ olduğundan, $x+1 = 2\tan\theta$ alalım. $\sqrt{x^2+2x+5} = 2\sec\theta$, $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ olur.

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{4\tan\theta-5}{2\sec\theta}2\sec^2\theta\,d\theta = \int 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta - 5\int \sec\theta\,d\theta$$

$$= 4\sec\theta - 5\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C = 2\sqrt{x^2+2x+5} - 5\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2} + \frac{x+1}{2}\right| + C$$

7. Basit Kesirlere ayrıştıralım.

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

den $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{3}{2}$ bulunur. Buradan:

$$\int \frac{3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x + C$$