MT 132 Analiz II ARA SINAV
ÇÖZÜMLER

1. (a) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$ olduğu MT 131 de gösterildi. Fonksiyon Limiti-Dizi Limiti ilişkisi Teoreminden $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan} n = \frac{\pi}{2}$ olur. $k_n = 4^n - n$ doğal sayıların kesin artan bir dizisi (Çünki ($x \geq 1$ için)$\frac{d}{dx}(4^x - x) = 4^x \ln 4 - 1 > 0$) olduğundan Alt Dizi Limiti Teoreminden $\lim \operatorname{Arctan}(4^n - n) = \frac{\pi}{2}$ olur.

(b) $\sum \left|(-1)^n \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}}\right| = \sum \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}}$ ve ($n \geq 2$ için) $\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}} > \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \geq 0$ ve p-serisi Teoreminden $\sum \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$ ıraksak olduğundan Karşılaştırma Testinden, $\sum \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}}$ de ıraksaktır. $\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}}$ dizisi için

$\lim \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}} = 0 \left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^{-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{x}} = 0 \right)$ ve

$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt[4]{x}}$ (ve $x \geq e^4 - 1$) için

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{4\sqrt[4]{x^3}}}{\sqrt{x}} = \frac{4x - (x+1)\ln(x+1)}{4\sqrt[4]{x^3}\sqrt{x}\,(x+1)} = \frac{x(4 - \ln(x+1)) - \ln(x+1)}{4\sqrt[4]{x^3}\sqrt{x}\,(x+1)} < 0$$

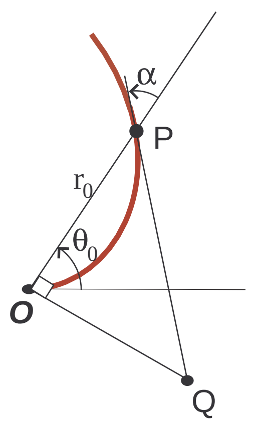
olduğundan $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}}\right)$ (nin 80. kuyruğu) azalan bir dizidir. İşaret Değişimli Seri Teoreminden $\sum(-1)^n \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}}$ yakınsaktır. Öyleyse $\sum(-1)^n \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n}}$ serisi koşullu yakınsaktır.

2. (a) $x = -2$ için $\sum (-1)^n \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)}{4 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 28 \cdots (8n-4)} (x+2)^{2n}$ kuvvet serisi yakınsaktır. $x \neq -2$ için $U_n = (-1)^n \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n+2)}{4\cdot12\cdot20\cdot28\cdots(8n-4)}(x+2)^{2n}$ olsun $x \neq -2$ için $\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim \left(\frac{3n+5}{8n+4}\right) |x+2|^2 = \frac{3}{8}|x+2|^2$ Oran Testinden $\frac{3}{8}|x+2|^2 < 1$ için kuvvet serisi mutlak yakınsak ve $\frac{3}{8}|x+2|^2 > 1$ için kuvvet serisi ıraksaktır. Yani $|x+2| < \sqrt{\frac{8}{3}}$ ise kuvvet serisi mutlak yakınsak ve $|x+2| > \sqrt{\frac{8}{3}}$ için kuvvet serisi ıraksaktır. Öyleyse yakınsaklık yarıçapı $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$ olur.

(b) $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ olsun. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, ($|x^2| < 1$ için) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ olsun. (Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $r = 1 > 0$ olur). Kuvvet Serilerinin Terim-Terime Türevlenebilmesi Teoreminden $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = f(x)$ olduğundan, Ara Değer Teoreminden, (bir $C \in \mathbb{R}$ için) $(-1, +1)$ aralığında, $g(x) = f(x) + C$ olur. $x = 0$ alınırsa $0 = \operatorname{Arctan} 0 + C$ den $C = 0$ bulunur. Öyleyse $|x| < 1$ için, $\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ olur. $a_{101} = \frac{(-1)^{50}}{101}$ olduğundan, $f^{(101)}(0) = 101! a_{101} = \frac{101!}{101} = 100!$ bulunur.

3. $x^2 + 8x + 32 = (x+4)^2 + 16 = 16\left(\left(\frac{x+4}{4}\right)^2 + 1\right)$ olduğundan $f(x) = 2\sqrt[4]{1 + \left(\frac{x+4}{4}\right)^2} = 2\left(1 + \left(\frac{x+4}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}$ Binom Teoreminden $(1+t)^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{n} t^n$, ($|t| < 1$ için), $t = \left(\frac{x+4}{4}\right)^2$ alınırsa ($\left|\frac{x+4}{4}\right| < 1$ için) $f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{n}\left(\frac{x+4}{4}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{4}}{n}\frac{(x+4)^{2n}}{2^{4n-1}}$ ($|x+4| < 4$ için yakınsak, $|x+4| > 4$ için ıraksak) Öyleyse yakınsaklık yarıçapı=4 olur.

4. (a) (α, teğetten yarıçapa olan yönlü açı olmak üzere) $\tan\alpha = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \theta$ olduğundan $P(r_0, \theta_0)$ noktasında $\tan\alpha = \theta_0$ bulunur. Aynı zamanda α, dik üçgenin P köşesindeki açıdır. Öyleyse $\theta_0 = \tan\alpha = \frac{|OQ|}{|OP|}$, ve $|OP| = r_0$ olduğundan $|OQ| = r_0\theta_0$ bulunur. Dik üçgenin alanı $A = \frac{1}{2}r_0^2\theta_0$ (yani, yarıçapı r_0, merkez açısı θ_0 olan daire diliminin alanı) bulunur. (Bu eşitliği M.Ö. 250 yıllarında Arşimet bulmuştur)



(b) $(x-1)^6+4y^2=64$ denklemi $\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^3\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$ olarak da yazılabilir. $\left(\frac{x-1}{2}\right)^3=\cos t,\quad \frac{y}{4}=\sin t$ alabiliriz. $x\geq 1$ olması için $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ aralığı (veya cos fonksiyonunun pozitif olduğu başka bir aralık) seçilebilir. Öyleyse $x=1+2\sqrt[3]{\cos t},\ y=4\sin t,\quad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$

5. (a) $t=x^3-1$ alınırsa $t'=3x^2$ olduğundan $\int x^2\,\mathrm{Arcsin}(x^3-1)\ dx=\frac{1}{3}\int \mathrm{Arcsin}\,t\ dt$ olur. Kısmi integrasyon ($u(t)=\mathrm{Arcsin}\,t,\ v'(t)=1$ alınması ile $u'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ v(t)=t$ olur)

$$\int \mathrm{Arcsin}\,t\ dt=t\,\mathrm{Arcsin}\,t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt=t\,\mathrm{Arcsin}\,t+\sqrt{1-t^2}+C$$

Bunlar birleştirilerek.

$$\int x^2\,\mathrm{Arcsin}(x^3-1)\ dx=\frac{1}{3}\left((x^3-1)\,\mathrm{Arcsin}(x^3-1)+\sqrt{1-(x^3-1)^2}\right)+C$$

(b) $x^2+2x+5=(x+1)^2+2^2$ olduğundan $x+1=2\tan\theta,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ alalım.
$dx=2\sec^2\theta\ d\theta,\ x=2\tan\theta-1,\ \sqrt{x^2+2x+5}=2\sec\theta$ olur.

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\ dx=\int\frac{2\tan\theta-1}{2\sec\theta}\ 2\sec^2\theta\ d\theta=\int 2\tan\theta\ \sec\theta\ d\theta-\int\sec\theta\ d\theta$$

$$=\quad 2\sec\theta-\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C=\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2}+\frac{x+1}{2}\right|+C$$

6. $\dfrac{x^5+1}{x^2(x^2+4)}=x+\dfrac{1-4x^3}{x^4+4x}$. $\dfrac{1-4x^3}{x^4+4x}$ in basit kesirlere ayrışımı:

$\dfrac{1-4x^3}{x^2(x^2+4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

$1-4x^3=Ax(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)x^2$

$x=0\rightarrow B=\frac{1}{4}\qquad x=2i\rightarrow C=-4,\ D=-\frac{1}{4},\ A=0$

$$\int\frac{x^5+1}{x^4+4x^2}\ dx=\int\left(x+\frac{1}{4x^2}-\frac{4x}{x^2+4}-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4x}-2\ln(x^2+4)-\frac{1}{8}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2}+C$$