MT 132 ANALİZ II (2017) Final Sınavı Çözümleri

1. $z = \tan\frac{\theta}{2}$ olsun. $\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$ olur.

$$\int \frac{d\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \int \frac{1}{1+z}\,dz = \ln|1+z| + C = \ln\left|1+\tan\frac{\theta}{2}\right| + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx \overset{u=\ln x}{=} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$ dir. Özge integrali ($\frac{1}{x\ln x}$ fonksiyonu, 1 yakınında sınırsız olduğu için) $\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ ve $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$ şeklinde iki (ilki 2.tip, ikincisi 1.tip) özge integrale bölelim. $t > 1$ için
$\displaystyle\int_t^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x|\Big|_t^2 = \ln(\ln 2) - \ln(\ln t)$ olur. $\displaystyle\lim_{t\to 1^+}(\ln(\ln 2) - \ln(\ln t)) = +\infty$ olduğundan $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ özge integrali ıraksaktır. Dolayısıyla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$ özge integrali ıraksaktır.

3. $G(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt$ olsun. $f(t) = \sqrt{1+t^4}$, $\mathbb{R}$ de sürekli olduğu için (D-İ.H.T.T. 2. şeklinden, tüm $\mathbb{R}$ de) $G'(x) = \sqrt{1+x^4}$ our. Belirli İntegralin özelliklerinden (veya D-İ.H.T.T. 1. şeklinden) $F(x) = G(x) - G(\sin x)$ olur. Zincir Kuralından,
$F'(x) = G'(x) - G'(\sin x)\cos x = \sqrt{1+x^4} - \sqrt{1+\sin^4 x}\,\cos x$ olur.

$$F''(x) = \frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}4x^3 - \frac{1}{2}(1+\sin^4 x)^{-\frac{1}{2}}4\sin^3 x\cos^2 x + \sqrt{1+\sin^4 x}\,\sin x$$

olur ve $F''(0) = 0$ bulunur.

4. $r = e^{3\theta}$ eğrisinin $(-\infty, \alpha]$ aralığındaki yay uzunluğu:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta = \int_{-\infty}^{\alpha} \sqrt{10}\,e^{3\theta}\,d\theta = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{\alpha} \sqrt{10}\,e^{3\theta}\,d\theta = \lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{10}}{3}\,e^{3\theta}\Big|_t^{\alpha} \\ &= \lim_{t\to-\infty} \frac{\sqrt{10}}{3}\,(e^{3\alpha} - e^{3t}) = \frac{\sqrt{10}}{3}\,e^{3\alpha} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten de $\frac{r(\alpha)}{L(\alpha)} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (sabit) olur.

5. x-ekseni etrafında dönme için (Disk Yöntemi ile) Hacim$\displaystyle = \int_0^1 \pi\left|\mathrm{Arcsin}^2 x - \frac{\pi^2}{4}x^4\right|dx$

y-ekseni etrafında dönme için (Silindirik Kabuk Yöntemi ile) Hacim$\displaystyle = \int_0^1 2\pi x\left|\mathrm{Arcsin}\,x - \frac{\pi}{2}x^2\right|dx$

(Bu soruda, $y = \mathrm{Arcsin}\,x$ ve $y = \frac{\pi}{2}x^2$ eğrilerinin (0 ve 1 dışında) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ de de kesiştiği benim gözümden kaçmış) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ için $0 < \frac{\pi}{2}x^2 < \mathrm{Arcsin}\,x$ ve $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$ için $0 < \mathrm{Arcsin}\,x < \frac{\pi}{2}x^2$ olması nedeni ile

$$\int_0^1 \pi\left|\mathrm{Arcsin}^2 x - \frac{\pi^2}{4}x^4\right|dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi\left(\mathrm{Arcsin}^2 x - \frac{\pi^2}{4}x^4\right)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi\left(\frac{\pi^2}{4}x^4 - \mathrm{Arcsin}^2 x\right)dx$$

ve

$$\int_0^1 2\pi x\left|\mathrm{Arcsin}\,x - \frac{\pi}{2}x^2\right|dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2\pi x\left(\mathrm{Arcsin}\,x - \frac{\pi}{2}x^2\right)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 2\pi x\left(\frac{\pi}{2}x^2 - \mathrm{Arcsin}\,x\right)dx$$

olur. Bu hacimlerden ikincisi (Disk Yöntemi ile) daha kolay bulunur:
$B = \left\{(x,y) : 0 \le y \le \frac{\pi}{4},\ \sin y \le x \le \sqrt{\frac{2y}{\pi}}\right\} \bigcup \left\{(x,y) : \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2},\ \sqrt{\frac{2y}{\pi}} \le x \le \sin y\right\}$
olduğu için y-ekseni etrafında dönme için (Disk Yöntemi ile) hacim

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi\left(\frac{2y}{\pi} - \sin^2 y\right)dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\left(\sin^2 y - \frac{2y}{\pi}\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2y - \pi\sin^2 y\right)dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\pi\sin^2 y - 2y)\,dy$$

$\int \sin^2 y\,dy = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2y)\,dy = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin 2y + C$, $\int 2y\,dy = y^2 + C$ olduğu kullanılarak y-ekseni etrafında dönme için Hacim$=\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}$ bulunur.

6. Eğrilerin kesişme noktalarını bulalım. $\sqrt{3}\,x^2 = \sqrt{4-x^2}$, $\quad 3x^4 = 4 - x^2$, $\quad 3x^4 + x^2 - 4 = 0$ den $x = \pm 1$ olur. Bölge: $B : 0 \le x \le 1,\ \sqrt{3}\,x^2 \le y \le \sqrt{4-x^2}$ şeklinde yazılabilir.

$$\overline{x} = \frac{\int_0^1 x\left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}\,x^2\right)\,dx}{\text{ALAN}} = \frac{\frac{1}{2}\int_3^4 \sqrt{u}\,du - \sqrt{3}\int_0^1 x^3\,dx}{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \left(4 - x^2 - 3x^4\right)\,dx}{\text{ALAN}} = \frac{\frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right)}{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

7. $f(a+h,b+k) = f(a,b) + A_1h + A_2k + hF_1(h,k) + kF_2(h,k) \quad (\lim_{(h,k)\to(0,0)} F_i(h,k) = 0\ (i=1,2))$ ve
$g(a+h,b+k) = g(a,b) + B_1h + B_2k + hG_1(h,k) + kG_2(h,k) \quad (\lim_{(h,k)\to(0,0)} G_i(h,k) = 0\ (i=1,2))$
olacak şekilde $F_i,\ G_i\ (i=1,2)$ fonksiyonları vardır. İki eşitlik taraf-tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) + g(a+h,b+k) =& (f(a,b) + g(a,b)) + (A_1 + B_1)h + (A_2 + B_2)k \\ &+ h(F_1(h,k) + G_1(h,k)) + k(F_2(h,k) + G_2(h,k)) \end{aligned}$$

olur.
$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (F_i(h,k) + G_i(h,k)) = 0 + 0 = 0\ (i = 1,2)$ olduğu için $f+g$ fonksiyonu (a,b) noktasında diferansiyellenebilirdir.

8. Kritik noktaları bulalım: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x = 2x(y+1) = 0$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y - 2 = 0$ olmalıdır. Birinci denklemden $x = 0$ veya $y = -1$ bulunur. İkinci denklemden, $x = 0$ ise $y = 1$ ve $y = -1$ ise $x = \pm 2$ bulunur. Kritik noktalar: $(0,1), (2,-1), (-2,-1)$ dir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \text{(Hepsi sürekli)}$$

İkinci Türev Testinden

(a) $\Delta(0,1) = 8 > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 4 > 0$ olduğu için f, $(0,1)$ de bir yerel minimuma sahiptir.

(b) $\Delta(\pm 2,-1) = -16 < 0$ olduğu için f, $(\pm 2,-1)$ noktalarında yerel ekstremuma ulaşmaz, eyer noktası vardır

9. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x-y} + y - e^{2x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y-x} + x + y^3$ olması gerekli ve yeterlidir.
$f(x,y) = \displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-y} + y - e^{2x}\right)\,dx = \ln|x-y| + xy - \frac{1}{2}e^{2x} + \phi(y)$ olmalıdır. Bu ve yukarıdaki eşitlikten $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-1}{x-y} + x + \phi'(y) = \dfrac{1}{y-x} + x + y^3$ elde edilir. Bu da ancak, $\phi'(y) = y^3$, eşdeğer olarak, $\phi(y) = \frac{y^4}{4} + C$ şeklinde olması ile mümkündür.

$$f(x,y) = \ln|x-y| + xy - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{y^4}{4} + C \text{ bulunur.}$$