MT 132 ANALİZ II (2016) Final Sınavı Çözümleri

1. $\displaystyle\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$ dir. Özge integrali $\int_0^1 \ln x\, dx$ ve $\int_1^\infty \ln x\, dx$ şeklinde iki (ilki 2.tip, ikincisi 1.tip) integrale bölelim. $0 < t < 1$ için $\displaystyle\int_t^1 \ln x\, dx = (x\ln x - x)\Big|_t^1 = -1 - t\ln t + t$ olur. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{s\to+\infty} -\frac{\ln s}{s} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{s\to+\infty} -\frac{\frac{1}{s}}{1} = 0$ olduğundan $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}(-1 - t\ln t + t) = -1$ olur. Bu nedenle, $\int_0^1 \ln x\, dx$ özge integrali yakınsaktır.
(1 < t olmak üzere) $\int_1^t \ln x\, dx = (x\ln x - x)\Big|_1^t = 1 + t\ln t - t$ ve ($\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ oluşundan) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1 + t(\ln t - 1) = +\infty$. Dolayısıyla $\displaystyle\int_1^\infty \ln x\, dx$ (1. Tip) özge integrali ıraksaktır.
Bu nedenle $\int_0^\infty \ln x\, dx$ özge integrali de ıraksaktır.

2. $f(x) = e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$ eğrisinin $0 \le x \le 1$ aralığındaki yay uzunluğu:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(e^x - \tfrac{1}{4}e^{-x}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\left(e^x + \tfrac{1}{4}e^{-x}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \left(e^x + \tfrac{1}{4}e^{-x}\right) dx = \left(e^x - \tfrac{1}{4}e^{-x}\right)\Big|_0^1 = e - \tfrac{1}{4e} - \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

3. $r = 2 + \cos\theta$ ve $r = \frac{5}{4}\sec\theta$ kesişim noktalarını bulmak için:

$$2 + \cos\theta = \frac{5}{4}\sec\theta \Leftrightarrow 4\cos^2\theta + 8\cos\theta - 5 = 0 \Leftrightarrow (2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 5) = 0$$

$\cos\theta = -\frac{5}{2}$ eşitliğinin gerçel çözümü olmadığından, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ olur.
$[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ aralığında $2 + \cos\theta$ ve $\frac{5}{4}\sec\theta$ süreklidir ve $2 + \cos\theta \ge \frac{5}{4}\sec\theta$ olur. Bölgenin alanı:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left((2 + \cos\theta)^2 - \left(\tfrac{5}{4}\sec\theta\right)^2\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta - \tfrac{25}{16}\sec^2\theta\right) d\theta \\ &= \left(4\theta + 4\sin\theta + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin(2\theta) - \tfrac{25}{16}\tan\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \tfrac{3\pi}{2} + \tfrac{9}{16}\sqrt{3} \end{aligned}$$

4. $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ ile $x^2 + y^2 = 4$ eğrileri $y = x$ doğrusuna göre simetrikdir. Kesişme noktalarından **biri** $(1, \sqrt{3})$ dir, diğeri bu noktanın $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan $(\sqrt{3}, 1)$ dir. (Ayrıca $(-1, -\sqrt{3})$ ve $(-\sqrt{3}, -1)$ noktalarında da kesişirler).
(Kesişme noktalarını kutupsal koordinatlarda bulmak daha kolaydır. Eğriler $r = 2$ ve $r^2\cos\theta\sin\theta = \sqrt{3}$ yani $r = 2$ ve $r^2\sin(2\theta) = 2\sqrt{3}$ şekline gelir. Kesişme noktaları için: $\theta = \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{3}$ olmalıdır. Yani (Birinci çeyrekteki kesişim noktalarında) $x = 1, \sqrt{3}$ olur.)
$\sqrt{4 - x^2}$ ve $\frac{\sqrt{3}}{x}$ fonksiyonları $[1, \sqrt{3}]$ aralığında sürekli ve $\sqrt{4 - x^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{x}$ dir.
$B : 1 \le x \le \sqrt{3},\quad \frac{\sqrt{3}}{x} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$ bölgesinin eksenler etrafında dönmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini bulacağız.

x-ekseni etrafında (Disk Yöntemi ile) $\displaystyle V = \pi\int_1^{\sqrt{3}} \left(\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{x}\right)^2\right) dx = \pi\left(4\sqrt{3} - \tfrac{20}{3}\right)$

y-ekseni etrafında (Silindirik Tabakalar Yöntemi ile) $\displaystyle V = 2\pi\int_1^{\sqrt{3}} x\left(\sqrt{4 - x^2} - \tfrac{\sqrt{3}}{x}\right) dx = \pi\left(4\sqrt{3} - \tfrac{20}{3}\right)$

5. (Önceki soruya bakınız) $B: 1 \le x \le \sqrt{3}$, $\quad \frac{\sqrt{3}}{x} \le y \le \sqrt{4-x^2}$ bölgesinin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulacağız.

$$\bar{x} = \frac{\int_1^{\sqrt{3}} x\left(\sqrt{4-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{x}\right)\,dx}{\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{x}\right)\,dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2\right)\,dx}{\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{x}\right)\,dx}$$

$\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{\pi}{3}$, $\quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{x}\,dx = \sqrt{3}\ln\sqrt{3}$

$\int_1^{\sqrt{3}}\left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2\right)\,dx = \int_1^{\sqrt{3}}\left(4 - x^2 - \frac{3}{x^2}\right)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \frac{20}{3}.$

Bunlardan

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\left(4\sqrt{3} - \frac{20}{3}\right)}{\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\ln\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}-10}{\pi - 3\sqrt{3}\ln\sqrt{3}}$$

Bölge $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan ağırlık merkezi bu doğru üzerindedir

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{6\sqrt{3}-10}{\pi - 3\sqrt{3}\ln\sqrt{3}}$$

6. $f(x,y)$ fonksiyonu bir (a,b) noktasında diferansiyellenebiliyor ve $g(x,y) = yf(x,y)$olsun. $f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + h\phi_1(h,k) + k\phi_2(h,k)$ olacak şekilde A, B gerçel sayıları ve $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \phi_i(h,k) = 0$ $(i = 1,2)$ sağlayan (iki değişkenli) ϕ_1, ϕ_2 fonksiyonları vardır.

$$\begin{aligned} & g(a+h, b+k) = (b+k)f(a+h, b+k) = (b+k)(f(a,b) + Ah + Bk + h\phi_1(h,k) + \phi_2(h,k)) \\ = \; & bf(a,b) + Abh + (Bb + f(a,b))k + h((b+k)\phi_1(h,k) + Ak) + k((b+k)\phi_2(h,k) + Bk) \end{aligned}$$

olur. ($A' = Ab$, $B' = Bb + f(a,b)$, $\psi_1(h,k) = (b+k)\phi_1(h,k) + Ak$, $\psi_2 = (b+k)\phi_2(h,k) + Bk$ için)

$$g(a+h, b+k) = g(a,b) + A'h + B'k + h\psi_1(h,k) + k\psi_2(h,k)$$

olur. $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \psi_i(h,k) = 0$ $(i = 1,2)$ olduğu tanımlarından (ve limit teoremlerinden) aşikardır.

7. $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$ fonksiyonu için kritik noktalar: $2x(y^2-1) = 0$, $\quad 2y(x^2-1) = 0$ denklemlerini sağlayan noktalardır. Bunlar: $(0,0), (\pm1, \pm1)$ noktalarıdır.
$f_{xx} = 2y^2 - 2$, $f_{xy} = f_{yx} = 4xy$, $f_{yy} = 2x^2 - 2$ olup hepsi, her yerde süreklidir.

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \; f_{xx}(0,0) = -2 < 0 \quad \text{(0,0) da yerel maksimum vardır.}$$

$$\Delta(\pm1, \pm1) = \begin{vmatrix} 0 & \pm4 \\ \pm4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \quad (\pm1, \pm1) \text{ de eyer noktası vardır.}$$

8. $f(x,y,z) = x^6z + xy^5 + yz^4$ fonksiyonu (polinom olduğu için) her yerde diferansiyellenebilirdir ve $P(-1,1,1)$ noktası $f(x,y,z) = 1$ kesit yüzeyi üzerindedir.
$\nabla f = (6x^5z + y^5)\vec{i} + (5y^4x + z^4)\vec{j} + (x^6 + 4yz^3)\vec{k}$ olur. $\nabla f(P) = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \neq 0$ olur.
Gradyant teğet düzlemine dik olduğundan;
Teğet düzlemi denklemi: $-5(x+1) - 4(y-1) + 5(z-1) = 0$
Normal doğru denklemi: $\dfrac{x+1}{-5} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-1}{5}$ olur.

9. $df = \left(\dfrac{3x^2}{x^3+y^2} + \cos y + 1\right)\,dx + \left(\dfrac{2y}{x^3+y^2} - x\sin y + e^y\right)\,dy$ olması için

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^3+y^2} + \cos y + 1 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^3+y^2} - x\sin y + e^y$$

olması gerekli ve yeterlidir. Birinci koşuldan:

$$f(x,y) = \int \left(\frac{3x^2}{x^3+y^2} + \cos y + 1 \right) dx = \ln|x^3+y^2| + x\cos y + x + \phi(y) \text{ olmalıdır}$$

Bu eşitlik ve ikinci koşuldan $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^3+y^2} - x\sin y + \phi'(y) = \dfrac{2y}{x^3+y^2} - x\sin y + e^y$ olmalıdır. Bu da:

$$\phi'(y) = e^y \text{ yani } \phi(y) = e^y + C \quad (C: \text{ bir sabit) olması ile mümkündür.}$$

Bunların sonucu olarak:

$$f(x,y) = \ln|x^3+y^2| + x\cos y + x + e^y + C$$

olmalıdır.