2015 MT 132 FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. Basit kesirlere ayrıştıralım. $\dfrac{x}{x^2-3x+2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$, $\quad x = A(x-2)+B(x-1)$ den $A=-1,\ B=2$ bulunur. Bu nedenle:

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C = \ln\frac{(x-2)^2}{|x-1|} + C$$

2. $z = \tan\frac{\theta}{2}$ olsun. $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2}$ olur.

$$\int \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int \frac{2dz}{3+z^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2} \overset{u=\frac{z}{\sqrt{3}}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan} u + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}} + C$$

3. $G(x) = \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\ln t}\,dt \quad (x \in I = (1,\infty))$ olsun. f, I da sürekli olduğundan D-İ. H. T.T (2. şekli) den (her $x \in I$ için) $G'(x) = \frac{1}{\ln x}$ olur. D-İ.H.T.T. (1. şekli) den $F(x) = \int_x^{x^3} \frac{1}{\ln t}\,dt = G(x^3) - G(x)$ olur. Türev alma kurallarından: (her $x \in I$ için $x^3 \in I$ olur ve) $F'(x) = G'(x^3)3x^2 - G'(x) = \frac{3x^2}{\ln(x^3)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x^2-1}{\ln x}$ bulunur. Burada da $F''(x) = \frac{2x\ln x - x + \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$ (ve $e \in I$ olduğundan) $F''(e) = e + \frac{1}{e}$ bulunur.

4.

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} \overset{u=1+\sqrt{x}}{=} 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

$\frac{1}{x+\sqrt{x}}$, $[1,+\infty)$ aralığında sürekli olduğundan, verilen özge integral I. tip özge integraldir.

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} 2\ln(1+\sqrt{x})\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty} 2(\ln(1+\sqrt{t}) - \ln 2) = 2(+\infty - \ln 2) = +\infty$$

olduğundan (I. tip özge integraller için yakınsaklık tanımından) $\int_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$ özge integrali ıraksaktır.

5. $\cos(5\theta)$, $5\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ yani $\theta = \pm\frac{\pi}{10}$ için 0 değerini alır ve $\cos(5\theta)$, $[-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$ aralığında (uçlar dışında) pozitif ve süreklidir. Böylece bu aralıkta bir yaprak oluşur. Bu nedenle:

$$\text{Bu yaprağın alanı} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \cos^2(5\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} (1+\cos(10\theta))\,d\theta = \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{10}\sin(10\theta)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} = \frac{\pi}{20}$$

6. (a) x-ekseni etrafında (Disk Metodu ile) Hacim$=\pi \displaystyle\int_{\frac{1}{3\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \sin^2\frac{1}{x}\,dx$

   (b) y-ekseni etrafında (Silindirik Tabakalar Metodu ile) Hacim$=2\pi \displaystyle\int_{\frac{1}{3\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} x\sin\frac{1}{x}\,dx$

7. Kesişme noktalar $x^4 = 8x$ den $x=0, x=2$ bulunur. $[0,2]$ aralığında x^4 ve $8x$ sürekli ve $8x \geq x^4$ dür.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x(8x-x^4)\,dx}{\int_0^2 (8x-x^4)\,dx} = \frac{\frac{32}{3}}{\frac{48}{5}} = \frac{10}{9}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 \left((8x)^2 - (x^4)^2\right)\,dx}{\int_0^2 (8x-x^4)\,dx} = \frac{\frac{512}{9}}{\frac{48}{5}} = \frac{160}{27}$$

8. $y = mx$ $(m \in \mathbb{R})$ doğruları boyunca limitleri inceleyelim.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 2m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + 2m^2}{1 + m^2} = \frac{2m^2}{1 + m^2}$$

ve bu değerler m ye bağlı olduğundan (sabit olmadığı için) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ limiti yoktur.

9. $f(x, y)$ için kritik noktalar: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 12 = 3(x^2 + y^2 - 4) = 0$ Birinci denklemden $x = 0$ veya $y = 0$ olmalı. İkinci denklemde yerine konunca $x = 0$ iken $y = \pm 2$ ve $y = 0$ iken $x = \pm 2$ bulunur. Kritik Noktalar: $(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = 6x$ (hepsi sürekli) olduğundan:

   (a) $\Delta(0, 2) = \det\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 2) = 12 > 0$ olduğundan bu noktada yerel minimum vardır.

   (b) $\Delta(0, -2) = \det\begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 144 > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -2) = -12 < 0$ olduğundan bu noktada yerel maksimum vardır.

   (c) $\Delta(2, 0) = \det\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0$ olduğundan bu noktada yerel ekstremum yoktur, eyer noktası vardır.

   (d) $\Delta(-2, 0) = \det\begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0$ olduğundan bu noktada yerel ekstremum yoktur, eyer noktası vardır.

10. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{1+x^2+y^4} - y + \frac{1}{1+x^2}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3}{1+x^2+y^4} - x + e^y$ gerekli ve yeterlidir.

$$f(x, y) = \int \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^4} - y + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2 + y^4) - xy + \operatorname{Arctan} x + \phi(y)$$

olmalıdır. Bu ifadenin y ye göre kısmi türevi alınarak:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3}{1 + x^2 + y^4} - x + \phi'(y)$$

bulunur. Bu da, f nin bilinen $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi ile aynı olmalıdır. Yani:

$$\frac{2y^3}{1 + x^2 + y^4} - x + \phi'(y) = \frac{2y^3}{1 + x^2 + y^4} - x + e^y$$

olmalıdır. Bu da ancak ve yalnız $\phi'(y) = e^y$ iken doğru olacaktır. Yani $\phi'(y) = e^y$ olması gerekli ve yeterlidir. Bu da, $\phi(y) = e^y + C$ iken olması ile mümkündür. Dolayısıyla:
$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2 + y^4) - xy + \operatorname{Arctan} x + e^y + C$ olması yeterlidir (ve gereklidir).