MT 132 Analiz II 2013 Final Sınavı Çözümleri:

1. $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}$ olur. Binom Teoreminden, (her $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ için)
$$f'(x) = 2(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n 4^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n}$$
$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$ olsun. K.S.T-T.T. Teoreminden (her $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ için)
$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n} = f'(x)$ olur. ODT nin bir sonucu olarak, (her $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ için) $f(x) = \mathrm{Arcsin}(2x) = g(x) + C$ o. ş. bir $C \in \mathbb{R}$ vardır. $x = 0$ alınarak $C = 0$ bulunur. Dolayısıyla (her $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ için) $\mathrm{Arcsin}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$ olur.
$$f^{(51)}(0) = 51!(x^{51} \text{ nin katsayısı}) = -51!\binom{-\frac{1}{2}}{25}\frac{2^{51}}{51} = -50!\binom{-\frac{1}{2}}{25}2^{51}$$
.

2. $z = \tan\frac{\theta}{2}$ olsun. $\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$, $\quad \cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\quad d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$ olur.
$$\int \frac{1}{1+\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta = \int \frac{1}{1+z}\,dz = \ln|1+z| + C = \ln|1+\tan\frac{\theta}{2}| + C$$

3. $1 + e^x = u^2$, $(u \geq 0)$ olsun. $e^x = u^2 - 1$, $dx = \frac{2u}{u^2-1}\,du$, $\sqrt{1+e^x} = u$ olur
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int \frac{2}{u^2-1}\,du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = \ln|u-1| - \ln|u+1| + C = \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C$$

4. $f(x,y)$, (a,b) noktasında diferansiyellenebilir olduğundan, (a,b) merkezli bir dairede tanımlıdır ve
$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + hG_1(h,k) + kG_2(h,k) \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} G_i(h,k) = 0 \ (i = 1,2)$$
olacak şekilde A, B sayıları ve G_1, G_2 fonksiyonları vardır. $g(x,y) = xf(x,y)$ de aynı dairede tanımlıdır ve
$$\begin{aligned} & g(a+h, b+k) = (a+h)f(a+h, b+k) \\ = \ & af(a,b) + (f(a,b) + A)h + aBk + h\left(Ah + (a+h)G_1(h,k)\right) + k\left(Bh + (a+h)G_2(h,k)\right) \\ = \ & g(a,b) + A'h + B'k + hF_1(h,k) + kF_2(h,k) \end{aligned}$$
$(A' = f(a,b) + aA,\ B' = aB,\ F_1(h,k) = Ah + (a+h)G_1(h,k),\ F_2(h,k) = Bh + (a+h)G_2(h,k))$
$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} F_1(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (Ah + (a+h)G_1(h,k)) = 0$
$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} F_2(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} (Bh + (a+h)G_2(h,k))) = 0$
olduğundan, $g(x,y)$ fonksiyonu da (a,b) noktasında diferansiyellenebilirdir.

5. $x \geq 1$ için $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x} \leq 0$ olduğundan $\frac{\sqrt{x}}{e^x}$, $[1, +\infty)$ aralığında (sürekli ve) azalandır. $\sum \frac{\sqrt{n}}{e^n}$ pozitif terimli serisi, ($\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$ olduğu için) Oran testinden yakınsaktır. İntegral testinden, $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}\,dx$ (I. Tip) özge integrali yakınsaklıktır

6. $G(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+t^3}\,dt$ olsun. $[-1,+\infty)$ aralığında, $f(t) = \sqrt{1+t^3}$ sürekli olduğundan, Diferansiyel-İntegral Hesabın Temel Teoreminin II. Şeklinden (her $x \in [-1,+\infty)$ için) $G'(x) = \sqrt{1+x^3}$ olur. (D-İ.H.T.T.(I) den) $F(x) = G(\operatorname{Arctan} x) - G(\sin x)$ ve dolayısıyla $F'(x) = \frac{\sqrt{1+(\operatorname{Arctan} x)^3}}{x^2+1} - \sqrt{1+(\sin x)^3}\cos x$ olur.

$$F''(0) = \frac{0\cdot 1 - 1\cdot 0}{1^2} - (0\cdot 1 + 1\cdot 0) = 0$$

7. $B: 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^4}$ olduğundan,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\left(\sqrt{1-x^4}-0\right)\,dx}{\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^4}-0\right)\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2}\left((\sqrt{1-x^4})^2 - 0^2\right)\,dx}{\int_0^1 \left(\sqrt{1-x^4}-0\right)\,dx}$$

$$\int_0^1 x\left(\sqrt{1-x^4}-0\right)\,dx \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\left((\sqrt{1-x^4})^2 - 0^2\right)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^4)\,dx = \frac{2}{5} \qquad \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{5\pi}{16}$$

8. $B: 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^4}$ olduğundan,

   (a) x-ekseni etrafında dönmesiyle (Disk Yöntemi ile):
   $$V = \int_0^1 \pi(\sqrt{1-x^4})^2\,dx = \pi\int_0^1 (1-x^4)\,dx = \frac{4\pi}{5}$$

   (b) y-ekseni etrafında dönmesiyle (Silindirik Kabuklar Yöntemi ile):
   $$V = \int_0^1 2\pi x(\sqrt{1-x^4}) - 0)\,dx \overset{u=x^2}{=} \pi\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi^2}{4}$$

   (Hacimler, 7. Problemdeki hesaplardan da yararlanarak, Pappus' ün Teoremi ile de bulunabilir)

9. Eğriyi $x = t^2, \quad y = t^3, \quad -1 \le t \le 2$ şeklinde parametrize edebiliriz. Fonksiyonlar belirtilen aralıkta sürekli türevlenebilir olduğundan;

$$L = \int_{-1}^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,dt = \int_{-1}^2 |t|\sqrt{4+9t^2}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\,dt + \int_0^2 t\sqrt{4+9t^2}\,dt$$

$$\int t\sqrt{4+9t^2}\,dt \overset{u=4+9t^2}{=} \frac{1}{27}(4+9t^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$L = \frac{1}{27}\left((4+9t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + (4+9t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\right) = \frac{1}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} + 40^{\frac{3}{2}} - 16\right)$$

10. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{7}$ aralığında bir yaprak oluşur.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{7}} \frac{1}{2}\sin^2(7\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{7}} (1-\cos(14\theta))\,d\theta = \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{1}{14}\sin(14\theta)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{7}} = \frac{\pi}{28}$$

11. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - y\cos(xy) + \frac{1}{x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - x\cos(xy) + y$ olması gerekli ve yeterlidir.

$$f(x,y) = \int \left(3x^2y - y\cos(xy) + \frac{1}{x}\right)\,dx = x^3y - \sin(xy) + \ln|x| + \phi(y)$$

Bu eşitlikten $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - x\cos(xy) + \phi'(y)$ elde edilir. Öyleyse

$$x^3 - x\cos(xy) + \phi'(y) = x^3 - x\cos(xy) + y$$

Yani $\phi'(y) = y$ olmalıdır. Buradan da $\phi(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$ bulunur.

$$f(x,y) = x^3y - \sin(xy) + \ln|x| + \frac{1}{2}y^2 + C$$

bulunur.

12. Kritik Noktaları bulalım:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 4y = 2y(x-2) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 4x = 0$
Birinci denklemden $y = 0$ veya $x = 2$ bulunur. İkinci denklemde yerine koyarak:
$y = 0$ ise $x = 0$ veya $x = 4$
$x = 2$ ise $y^2 = \frac{4}{3}, \ \rightarrow \ y = \frac{\pm 2}{\sqrt{3}}$ bulunur.
Kritik Noktalar: $(0,0), (4,0), (2, \frac{2}{\sqrt{3}}), (2, \frac{-2}{\sqrt{3}})$ olur.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - 4 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2y & 2x-4 \\ 2x-4 & 6y \end{vmatrix} = 12y^2 - (2x-4)^2$$

olur. Tüm 2. basamak kısmi türevler süreklidir. 2. Türev testinden:
$\Delta(0,0) = -16 < 0$ olduğundan $(0,0)$ da yerel ekstremum yoktur (Eyer noktası vardır)
$\Delta(4,0) = -16 < 0$ olduğundan $(4,0)$ da yerel ekstremum yoktur (Eyer noktası vardır)
$\Delta(2, \frac{-2}{\sqrt{3}}) = 16 > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, \frac{-2}{\sqrt{3}}) = \frac{-4}{\sqrt{3}} < 0$ olduğundan $(2, \frac{-2}{\sqrt{3}})$ da yerel maksimum vardır)
$\Delta(2, \frac{2}{\sqrt{3}}) = 16 > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{\sqrt{3}} > 0$ olduğundan $(2, \frac{2}{\sqrt{3}})$ da yerel minimum vardır)