Leonard Euler $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin Toplam Formülünü nasıl buldu?

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (Gerçel veya Karmaşık Katsayılı) bir polinom olsun. Bu polinomun *tüm* (gerçel veya karmaşık) köklerini $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ile gösterirsek ($p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ oluşundan) aşağıdaki bağıntılar (Vieta Formülleri) gösterilebilir:

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$

$\vdots$

$x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_3\cdots x_n + \cdots + x_2x_3\cdots x_n = (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}$

$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$

Son iki eşitlik taraf tarafa bölünürse:

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{-a_1}{a_0}$

Bulunur.

Diğer taraftan her $x \in \mathbb{R}$ için

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ olduğu bilinmektedir (bunu ileride göstereceğiz)

Öyleyse (her $x > 0$ için):

$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} + \cdots$

olur.

$f(x)$ in kökleri $x_1 = \pi^2, x_2 = 2^2\pi^2, \cdots, x_n = n^2\pi^2, \cdots$

(yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = n^2\pi^2$ olur)

Euler 1735 de Vieta Formüllerinden (Burada $f(x)$ polinom olmadığı halde bu formülü kullanıyoruz!)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6}$ yani $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ elde edilir.

Euler aynı mantıkla:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$

formüllerini buldu.

Euler daha sonra 1739 da her k için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ toplam formülünü Benoulli sayıları cinsinden veren bir formül buldu.

Siz de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ toplamını bulmayı deneyin.