

Çok Değişkenli Fonksiyonlar için Diferansiyellenebilmenin iki farklı tanımının eşdeğer oluşunun bir ispatı:

Çok değişkenli fonksiyonlar için diferansiyellenebilmenin tanımı iki farklı şekilde yapılabilir.

f , bir $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ noktası merkezli bir yuvarda tanımlı (n değişkenli) bir fonksiyon olsun. Bunlar:

- Eğer bazı A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sayıları ve $\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} G_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olacak şekilde (n değişkenli) G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) fonksiyonları için $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n A_i h_i + \sum_{i=1}^n h_i G_i(h_1, \dots, h_n)$ oluyor ise
veya
- Eğer bazı A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sayıları için
$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) - \sum_{i=1}^n A_i h_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}} = 0$$
 oluyor ise

f fonksiyonu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ noktasında diferansiyellenebilirdir deriz.

Bu tanımlardaki A_i sayıları, f nin $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ noktasındaki kısmi türevleri olacaktır. SADECE $n = 1$ durumunda, bu tanımın, fonksiyonun o noktada türevlenebilmesine eşdeğer olduğu kolayca gösterilir.

Burada, $n = 2$ durumu için, bu iki koşulun eşdeğer olduğunu ispatlayacağız. $n > 2$ durumu için ispat, buradaki ile hemen hemen aynıdır.

Önce, ikinci koşul sağlanıyor ise ilk koşulun sağlandığını gösterelim:

f , bir (a, b) noktası merkezli bir dairenin her noktasında tanımlı ve A, B gerçel sayıları için

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \text{ (*) olsun.}$$

$$\text{Kısaca, } F(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \text{ diyelim.}$$

$$G_1(h, k) = \begin{cases} \frac{hF(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h}{h^2 + k^2} (f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk) & (h, k) \neq (0, 0) \text{ ise} \\ 0 & (h, k) = (0, 0) \text{ ise} \end{cases}$$

$$G_2(h, k) = \begin{cases} \frac{kF(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{k}{h^2 + k^2} (f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk) & (h, k) \neq (0, 0) \text{ ise} \\ 0 & (h, k) = (0, 0) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Her $h, k \in \mathbb{R}$ için $f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + h G_1(h, k) + k G_2(h, k)$ olduğu kolayca görülür.

Her $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ için, $\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$ ve $\frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$ olduğundan,

$$-|F(h, k)| \leq G_i(h, k) \leq |F(h, k)| \quad (i = 1, 2) \text{ olur.}$$

$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} F(h, k) = 0$ olduğundan, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \pm |F(h, k)| = 0$ olur. Sıkıştırma Teoremi kullanarak,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} G_i(h, k) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

elde edilir.

Diğer yönün ispatı da çok farklı değildir:

f , bir (a, b) noktası merkezli bir dairenin her noktasında tanımlı ve $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} G_i(h, k) = 0$ ($i = 1, 2$) şeklinde iki fonksiyon ve A, B gerçel sayıları için:
Her $h, k \in \mathbb{R}$ için $f(a + h, b + k) = f(a, b) + Ah + Bk + h G_1(h, k) + k G_2(h, k)$ olsun.

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} G_1(h, k) + \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} G_2(h, k) \right) \quad (1)$$

olur. Her $h, k \in \mathbb{R}$, $(h, k) \neq (0, 0)$ için, $\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1$ ve $\left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1$ ve $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} G_i(h, k) = 0$ ($i = 1, 2$) olduğundan, (yukarıdaki gibi, Sıkıştırma Teoremi kullanarak)

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} G_1(h, k) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} G_2(h, k) = 0 \quad \text{olur.}$$

Bunlardan ve 1 numaralı eşitlikten,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad \text{elde edilir.}$$