MT 131 I. ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16 \geq 0 \text{ ve } \ x^2 - 2x - 15 \neq 0\} = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) - \{-3, 5\}$
$= (-\infty, -4] \cup [4, 5) \cup (5, +\infty)$

2. $R_f = \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x-2}{x^2+x+1} \text{ o.ş bir } x \in D_f \text{ var}\}$
$= \{y \in \mathbb{R} : yx^2 + (y-1)x + (y+2) = 0 \text{ o.ş bir } x \in D_f \text{ var}\}$
$yx^2 + (y-1)x + (y+2) = 0$ denklemi, $y = 0$ iken 2. derece olmaz fakat çözümü vardır ($x = 2$). $y \neq 0$ için 2. derece bir denklem olduğundan yalnızca $\Delta \geq 0$ iken çözümü vardır.
$R_f = \{0\} \cup \{y : y \neq 0, \ -3y^2 - 10y + 1 \geq 0\} = \{y : \ -3y^2 - 10y + 1 \geq 0\}$
$= [-\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3}, -\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3}]$

3. $\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-x+1} = \dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+x-1)}{(\sqrt{x+1}-x+1)(\sqrt{x+1}+x-1)} = \dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+x-1)}{x+1-(x-1)^2}$
$= \dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+x-1)}{-x(x-3)} = \dfrac{(x+3)(\sqrt{x+1}+x-1)}{-x}$ ($x \neq 3$ için)
olduğundan
$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-x+1} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+3)(\sqrt{x+1}+x-1)}{-x} = -8$

4. $x+\sqrt{x^2+x+7} = \dfrac{(x+\sqrt{x^2+x+7})(x-\sqrt{x^2+x+7})}{x-\sqrt{x^2+x+7}} = \dfrac{x^2-(x^2+x+7)}{x-\sqrt{x^2+x+7}}$
$= \dfrac{-x-7}{x-\sqrt{x^2+x+7}} = \dfrac{-x-7}{x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \dfrac{x(-1-\frac{7}{x})}{x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}} =$
$\dfrac{x(-1-\frac{7}{x})}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \dfrac{-1-\frac{7}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}$ ($x \to -\infty$ olduğundan $x < 0$ varsayabiliriz ve $|x| = -x$ olur) Limit Teoremlerinden
$\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2+x+7}) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-1-\frac{7}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \dfrac{-1-0}{1+\sqrt{1+0+0}} = \dfrac{-1}{2}$

5. $(x-2)\cos x = 1$ denkleminin bir çözümünü var olduğunu göstermek yeterlidir. $f(x) = (x-2)\cos x$, $\lambda = 1$ olsun. $f(0) = -1 < \lambda$
$f(2\pi) = (2\pi - 2) > \lambda$ ($\pi > 2\sqrt{2} > 2$ olduğundan $2\pi - 2 > 4 - 2 > 2$ olur.) f, $[0, 2\pi]$ aralığında sürekli (çünki tüm $\mathbb{R}$ de sürekli) olduğundan Ara Değer Teoreminden $f(c) = \lambda$ yani $(c-2)\cos c = 1$ olacak şekilde (en az) bir $c \in (0, 2\pi)$ sayısı vardır.

6. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, $\Delta f = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}$
$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \dfrac{(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\Delta x\ (\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$
$= \dfrac{x+\Delta x - x}{\Delta x\ (\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

7. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^3}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 x(1+\cos x) = 1^2 \cdot 0 \cdot 2 = 0$
$-1 < x < 0$ için $\dfrac{\lfloor x^2 \rfloor}{x} = 0$ olduğundan $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$ olur. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ve f, 0 da süreksiz (çünki tanımlı değil) olduğundan 0 da kaldırılabilir süreksizlik vardır.
$-\sqrt{2} < x < -1$ için $1 < x^2 < 2$ olur ve $\frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x} = \frac{1}{x}$ olduğundan
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{\lfloor x^2 \rfloor}{x} = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x} = -1$
$-1 < x < 0$ için $\dfrac{\lfloor x^2 \rfloor}{x} = 0$ olduğundan
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 0 = 0$ olur. -1 de sıçrama tipi süreksizlik vardır.

8. $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ olduğundan (her $x > \frac{1}{2}$ için)

$$x - 1 \le x + \sin x \le x + 1 \text{ ve } 0 < 4x^2 - 1 \le 4x^2 - \cos x \le 4x^2 + 1 \text{ olur}$$

$$\frac{x-1}{4x^2+1} \le \frac{x+\sin x}{4x^2 - \cos x} \le \frac{x+1}{4x^2-1}$$

olur. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x \pm 1}{4x^2 \mp 1} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x} \pm \frac{1}{x^2}}{4 \mp \frac{1}{x^2}} = \dfrac{0 \pm 0}{4 \mp 0} = 0$ olduğundan Sandviç (Sıkıştırma) Teoreminden $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x + \sin x}{4x^2 - \cos x} = 0$ olur.

9. (a) dan $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, (b) ve (c) den (ve Süreklilik için Limit Kriterinden) ($b = f(a)$ olmak üzere) $\lim_{t\to b} g(t) = g(b)$ olur. (Tek Taraflı Limitler için Değişken Değiştirme Teoreminden) $\lim_{x\to a^+} g(f(x)) = g(b) = g(f(a))$ olur (Burada $x \ne a$ iken $f(x) \ne b$ koşulunun sağlanmasına gerek yoktur, çünki $\lim_{t\to b} g(t) = g(b)$ oluşundan $f(x) = b$ olsa da $|g(f(x)) - g(b)| < 0$ sağlanacaktır). Bu da $g \circ f$ nin a sayısında sağdan sürekli olması demektir.

10. $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ ve a yı içeren bir açık aralıkta (belki a dışında) $f(x) > 0$ olur.
$\lim_{x\to a} g(x) = L$, $L > 0$ olduğundan (Limit tanımından hemen sonraki ikinci teoremden) a yı içeren bir açık aralıkta (belki a dışında) $g(x) > 0$ olur. $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} g(x) \dfrac{1}{f(x)} = L \cdot 0 = 0$ ve a yı içeren bir açık aralıkta (belki a dışında) ($f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olduğundan) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ olur. Dolayısıyla $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ olur.