1 a) $D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f$ ve $f(x) \in D_g\}$ dir. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq 0, \sqrt{x-2} \neq 0\} = (2,+\infty)$ olur. $f(x) \in D_g$ olması -1$< \frac{x}{\sqrt{x-2}} < 3$ demektir.

Bu ($x > 2$ olduğundan) $\frac{x}{\sqrt{x-2}} < 3$ olmasına eşdeğerdir.$\frac{x^2}{x-2} < 9$,$\frac{x^2}{x-2} - 9 < 0$, $\frac{x^2-9x+18}{x-2} < 0$, $\frac{(x-3)(x-6)}{x-2} < 0$ (Zaten $x > 2$ olduğundan) $x \in (3,6)$ olur.

$D_{g\circ f} = (3,6)$ bulunur.

1.b). $f(x) = x\sin x - \cos x$ olsun. $f(0) = -1 < 0$ ve $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ olduğundan $\lambda = 0$ sayısı $f(a)$ ile $f(b)$ arasındadır.f her yerde tanımlı ve sürekli olduğundan $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında da süreklidir. Ara Değer Teoreminden en az bir $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $f(c) = 0$ olur.$c \neq 0$ olduğundan $c \neq -c$ dir ve $f(x)$ çift fonksiyon olduğundan $f(-c) = 0$ olur.c ve $-c$, $x\sin x = \cos x$ denkleminin iki farklı çözümüdür.(Ara Değer Teoremi kullanarak her $n \in \mathbb{N}$ için $(2n\pi, \frac{4n+1}{2}\pi)$ aralığında en az bir çözüm olduğu gösterilebilir)

2.a)$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt[3]{x+6}-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{(\sqrt[3]{x+6}-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x-4)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{(x+6-8)(\sqrt{2x}+2)}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{2(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{(\sqrt{2x}+2)} = \frac{2(4+4+4)}{2+2} = 6$

$(\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{(x+6)^2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x+6)^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \lim_{x\to 2} 2\sqrt[3]{x+6} = 2\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x+6)}$

$= 2\sqrt[3]{8} = 4, \lim_{x\to 2} 4 = 4, \lim_{x\to 2} \sqrt{2x} = \sqrt{\lim_{x\to 2} 2x} = \sqrt{4} = 2,\ \lim_{x\to 2} 2 = 2$ ve Limit teoreminden.)

2 b) $\lim_{x\to -\infty} 2x+\sqrt{4x^2+18x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(2x+\sqrt{4x^2+18x+1})(2x-\sqrt{4x^2+18x+1})}{2x-\sqrt{4x^2+18x+1}}$

$= \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2-(4x^2+18x+1)}{2x-\sqrt{4x^2+18x+1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-(18x+1)}{2x-\sqrt{4x^2+18x+1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x(18+\frac{1}{x})}{2x-\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{18}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$x \to -\infty$ olduğundan $x < 0$ varsayabiliriz ve $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ olur. $\lim_{x\to -\infty} \frac{-x(18+\frac{1}{x})}{2x-\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{18}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x(18+\frac{1}{x})}{x(2+\sqrt{4+\frac{18}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-(18+\frac{1}{x})}{2+\sqrt{4+\frac{18}{x}+\frac{1}{x^2}}} =$

$\frac{\lim_{x\to -\infty}(-18-\frac{1}{x})}{\lim_{x\to -\infty}(2+\sqrt{4+\frac{18}{x}+\frac{1}{x^2}})} = \frac{-18-0}{2+\sqrt{\lim_{x\to -\infty}(4+\frac{18}{x}+\frac{1}{x^2})}} = \frac{-18}{2+\sqrt{4}} = \frac{-9}{2}$ bulunur.

3.a) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} \overset{t=x-\pi}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3(t+\pi)}{\tan 5(t+\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(3t+3\pi)\cos(5t+5\pi)}{\sin(5t+5\pi)} \overset{\text{toplam açı formülü}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t \cos 5t}{-\sin 5t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{-3}{5} \frac{\sin 3t}{3t} \frac{5t}{\sin 5t} \cos 5t = \frac{-3}{5} \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t}{3t} \lim_{t\to 0} \frac{5t}{\sin 5t} \lim_{t\to 0} \cos 5t$

$\overset{u=3t,v=5t}{=} \frac{-3}{5} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \frac{1}{\lim_{v\to 0} \frac{\sin v}{v}} \lim_{v\to 0} \cos v = \frac{-3}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{-3}{5}$

b)$\frac{\sin \pi x}{x-1}$ her $x < 1$ için sürekli ve tam değer fonksiyonu tamsayılar dışında sürekli olduğundan bu fonksiyon sadece $x = 1$ ve $2x - \sqrt{2} \in Z$ (ve $x > 1$) iken süreksiz **olabilir**. Bu aralıkta bunlardan sadece 1 , $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ve $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ vardır.

i)$a = 1$ için $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{[2x-\sqrt{2}]}{x-1} = 0$ (1$< x < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ için $0 < 2x - \sqrt{2} < 1$ ve $f(x) = 0$ olduğundan)

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin \pi x}{x-1} \overset{t=\pi x-\pi}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\pi \sin(t+\pi)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\pi \sin t}{t} = -\pi$ olur.

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ var ama farklı olduğundan $f(x)$ 1 de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

ii) $a=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ olsun $a>1$dir. $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{[2x-\sqrt{2}]}{x-1} \overset{a<x<a+0,5 \text{ için } 1<2x-\sqrt{2}<2}{=} \lim_{x\to a^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{a-1}$ olur

$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{[2x-\sqrt{2}]}{x-1} \overset{1<x<a \text{ için } 0<2x-\sqrt{2}<1}{=} \lim_{x\to a^+} 0=0$ olur.

$\lim_{x\to a^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to a^-} f(x)$ var ama farklı olduğundan $f(x)$, $a=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 'da sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

iii)$a=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ olsun. $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{[2x-\sqrt{2}]}{x-1} \overset{a<x<2 \text{ için } 2<2x-\sqrt{2}<3}{=} \lim_{x\to a^+}\frac{2}{x-1}=\frac{2}{a-1}$olur.

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a^-}\frac{[2x-\sqrt{2}]}{x-1} \overset{1,5<x<a \text{ için } 1<2x-\sqrt{2}<2}{=} \lim_{x\to a^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{a-1}$ olur.

Yine $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to a^-} f(x)$ var ama farklı olduğundan $f(x)$, $a=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ 'da da sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

4a)i) $\frac{d}{dx}(\cos(\frac{x}{x+1})^{\frac{1}{3}})=-\sin((\frac{x}{x+1})^{\frac{1}{3}})\frac{1}{3}(\frac{x}{x+1})^{-\frac{2}{3}}(\frac{1(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2})=\frac{-1}{3}\sin((\frac{x}{x+1})^{\frac{1}{3}})(\frac{x}{x+1})^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{(x+1)^2}$

ii) $\frac{d}{dx}((\frac{\sin x}{1+\cos x})^{\frac{1}{5}})=\frac{1}{5}(\frac{\sin x}{1+\cos x})^{-\frac{4}{5}}(\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2})=\frac{1}{5}(\frac{\sin x}{1+\cos x})^{-\frac{4}{5}}(\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2})$

4.b) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1+\Delta x}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1+\Delta x}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1+\Delta x}}{\Delta x\sqrt{x+1}\sqrt{x+1+\Delta x}}=$ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1+\Delta x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1+\Delta x})}{\Delta x\sqrt{x+1}\sqrt{x+1+\Delta x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1+\Delta x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+1)-(x+1+\Delta x)}{\Delta x\sqrt{x+1}\sqrt{x+1+\Delta x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1+\Delta x})}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\sqrt{x+1}\sqrt{x+1+\Delta x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1+\Delta x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+1+\Delta x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1+\Delta x})} \overset{x>0 \text{için}}{=} \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$ elde edilir.

5 a). $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}, y(x+1)=\sqrt{x}, (x\geq 0$ olması gerektiğinden $y\geq 0$ olur) $y^2(x+1)^2=x, y^2+(2y^2-1)x-y^2=0$. Bu denklemin ($x$ için) bir gerçel çözümü olması için $\Delta=(2y^2-1)^2-4y^4\geq 0$ olmalıdır. Bu da $1-4y^2\geq 0$ olması demektir. Bu da, $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$denkleminin bir gerçel çözümü olması için $0\leq y\leq \frac{1}{2}$olmasının gerekli ve yeterli olması demektir.$R_f=[0,\frac{1}{2}]$ olur.

5.b) $\frac{d}{dx}(\frac{xy^2}{1+y})-\frac{d}{dx}(\sin(\frac{y}{x}))=\frac{d}{dx}1$ ve $\frac{(y^2+2xyy')(1+y)-xy^2y'}{(1+y)^2}-\cos(\frac{y}{x})(\frac{y'x-y}{x^2})=0$ bulunur. y' için çözülürse:

$(\frac{2xy(1+y)-xy^2}{(1+y)^2}-\cos(\frac{y}{x})\frac{1}{x})y'=\frac{-y}{1+y}-\frac{y}{x^2}\cos(\frac{y}{x})$ buradan da $y'=\frac{x^2y(1+y)+y(1+y)^2\cos(\frac{y}{x})}{x(1+y)^2\cos(\frac{y}{x})-2x^3y-x^3y^2}$