MT 131 ANALİZ I ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{2}{3}}$, $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-8)$ den Kritik sayılar $0, \frac{8}{5}$ dir.

$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(5x+4)$ de Büküm noktası **adayları**: $0, -\frac{4}{5}$

	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Grafik				

Bu tablodan şunlar elde edilir:

(f; 0 ve $\frac{8}{5}$ de sürekli olduğundan) I. Türev testinden, f; 0 da bir yerel maksimuma, $\frac{8}{5}$ da bir yerel minimuma erişir.

Ayrıca, büküm noktası tanımından (f; $-\frac{4}{5}$ de türevlenebildiği için teğeti vardır) f; $-\frac{4}{5}$ de bir Büküm noktasına sahiptir. 0 da bükeylik değişmediği için büküm noktası yoktur.

(b) $f(x) = x^5 + 2x - 3$ ($f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ olduğundan, f 1-1 dir ve tersi de türevlenebilirdir) Ters Fonksiyonun Türevlenebilmesi Teoreminden, $g'(0) = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$ dır ve $f(x) = x^5 + 2x - 3 = 0$ denkleminin tek çözümünün $x = 1$ olduğu (yani $f^{-1}(0) = 1$ olduğu) kolayca görülür . Bu nedenle $g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$ dir.

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\text{Arcsin}(x^2)}$ limitininde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in Kuralını kullanmak için diğer koşullar (pay ve payda (0 yakınında) türevlenebilir ve paydanın türevi ($x \neq 0$ için) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \neq 0$ olduğundan) da sağlanıyor. Limit teoremlerinden, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{\sqrt{1-x^4}}{2} = 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan L'Hospital in Kuralı gereği $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\text{Arcsin}(x^2)} = \dfrac{1}{2}$ olur.

(b) $\sin(xy) + \frac{x^2}{y} = 1$ Kapalı Fonksiyon Türevi yöntemiyle: $\cos(xy)(y + xy') + \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = 0$ olur. Bu eşitlik y' için çözülerek, $y' = \dfrac{-\frac{2x}{y} - y\cos(xy)}{-\frac{x^2}{y^2} + x\cos(xy)}$ bulunur.

3. (a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2 - x}}$ fonksiyonu $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ kümesinde tanımlıdır ve sürekli bir fonksiyondur. Bu nedenle, (paydasının tek taraflı 0 limite sahip olduğu) 0 ve 1 dışında düşey asimptotu var olamaz.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x^2 - x}\sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} = 1 \cdot 0 = 0$$

olur, bu nedenle 0 da düşey asimptot yoktur. (L'Hospital 'in Kuralı da kullanılabilir) (Limit teoremlerinden) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\sin x} = 0$ ve $1 < x < \pi$ için $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2-x}} > 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2-x}} = +\infty$ olur. $x=1$ de bir düşey asimptot vardır.
$|x| > 1$ için $\frac{-1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x^2-x}} \leq \frac{1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$ ve (limit teoremlerinden) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\pm 1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = 0$ olduğundan, Sıkıştırma teoremi kullanarak, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2-x}} = 0$ elde edilir. Bu da $y=0$ doğrusunun (biricik) yatay asimptot olduğunu gösterir.

(b) $\lim\limits_{x\to e} (\ln x)^{\frac{x}{1-\ln x}}$ limitinde 1^∞ belirsizliği vardır. $\ln\left((\ln x)^{\frac{x}{1-\ln x}}\right) = \frac{x\ln(\ln x)}{1-\ln x}$ dir. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{x\ln(\ln x)}{1-\ln x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in Kuralını uygulamak için diğer koşullar da (pay ve payda e yi içeren bir açık aralıkta türevlenebiliyor ve paydanın türevi 0 değil) sağlanıyor.

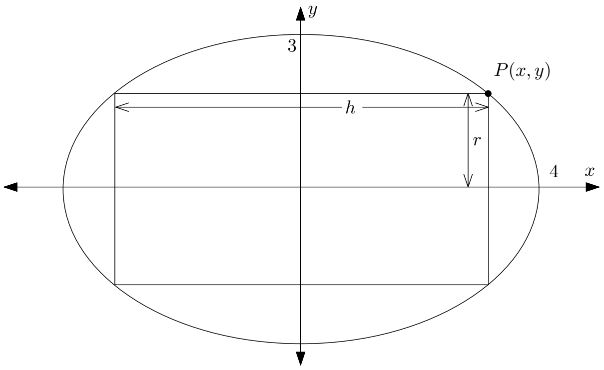
$$\text{limit teoremlerinden } \lim_{x\to e} \frac{\ln(\ln x) + x\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{-\frac{1}{x}} = -e$$

olduğundan, L'Hospital'in Kuralından, $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{x\ln(\ln x)}{1-\ln x} = -e$ bulunur.
(Tanımından)$(\ln x)^{\frac{x}{1-\ln x}} = \exp(\frac{x\ln(\ln x)}{1-\ln x}) = e^{\frac{x\ln(\ln x)}{1-\ln x}}$ olduğu ve exp fonksiyonu $-e$ de sürekli olduğu için,

$$\text{Bileşkenin Limiti Teoreminden,} \quad \lim_{x\to e} (\ln x)^{\frac{x}{1-\ln x}} = \exp(-e) = e^{-e} = \frac{1}{e^e} \text{ olur.}$$

4. (a) $[1,+\infty)$ aralığında $f(x) = \operatorname{Arccos}(\frac{1}{x})$ ve $g(x) = \operatorname{Arcsec} x$ fonksiyonları süreklidir ve bu aralığın her iç noktasında ikisi de türevlenebilir.
(Her $x>1$ için) $f'(x) = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = g'(x)$ olur. Ortalama Değer Teoremini bir sonucu olarak (Her $x\in[1,+\infty)$ için) $f(x) = g(x)+c$ olacak şekilde bir $c\in\mathbb{R}$ vardır. $x=1$ seçildiğinde, $\operatorname{Arccos} 1 = 0$ ve $\operatorname{Arcsec} 1 = 0$ olduğu için $c=0$ bulunur. Yani, her $x\geq 1$ için $\operatorname{Arccos}\frac{1}{x} = \operatorname{Arcsec} x$ olur.

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ b=25,\ a=27$ olsun. f; $[25,27]$ aralığında her basamaktan türevlenebildiği için (her $n\in\mathbb{N}$ için) Kalanlı Taylor Teoreminin koşulları sağlanır. $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$ olduğundan, $f(a)=3$, $f'(a)=\frac{1}{27}$, $f''(a) = -\frac{2}{3^7}$, $f'''(a) = \frac{10}{3^{11}}$,
$P_3(x) = 3 + \frac{1}{27}(x-27) - \frac{2}{2\cdot 3^7}(x-27)^2 + \frac{10}{2\cdot 3^{13}}(x-27)^3$ olup (R_3 terimi yoksayılıp)
$\sqrt[3]{25} \approx P_3(25) = 3 - \frac{2}{3^3} - \frac{4}{3^7} - \frac{40}{3^{12}}$
Kalanlı Taylor Teoreminden, $f(25) = P_3(25) + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(25-27)^4$ olacak şekilde bir $c\in(25,27)$ sayısı vardır. $f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}$ olduğundan (bir $25<c<27$ için)
Hata $= |R_3| = \frac{80\cdot 16}{4!\cdot 81 c^{\frac{11}{3}}}$ olur. Bu eşitlikten, $2^{11} = 8^{\frac{11}{3}} < 25^{\frac{11}{3}} < c^{\frac{11}{3}}$ olduğu için, Hata $< \frac{1}{3\cdot 2^{10}}$ elde edilir. (aslında hata bu sayıdan daha da küçüktür ama sağdaki sayı rasyonel bir sayıdır)

5. 

En büyük silindir elde etmek için dikdörtgenin tüm köşelerinin elips üzerinde olması gerektiği aşikardır. $P(x, y)$ dikdörtgenin birinci bölgedeki (çeyrekteki) köşesi olsun.

Bu dikdörtgenin (x-ekseni etrafında) dönmesiyle oluşacak silindir için $r = y,\ h = 2x$ olur.

Silindirin hacmi maksimum yapılacak.

Silindirin hacmi$=\pi r^2 h = 2\pi x y^2$ maksimum yapılacak.

$y^2 = 9(1 - \frac{x^2}{16})$ olduğundan, $f(x) = 18\pi(x - \frac{x^3}{16})$ maksimum yapılacak.

P birinci bölgede (ve elips üzerinde) olduğu için $0 < x < 4$ olmalıdır.

O zaman soru: $f(x) = 18\pi(x - \frac{x^3}{16})$ fonksiyonunun $(0, 4)$ aralığında maksimum yapılmasıdır.

$f'(x) = 18\pi(1 - \frac{3x^2}{16})$ oluşundan kritik sayılar: $\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ olur. Bunlardan sadece $\frac{4}{\sqrt{3}} \in (0, 4)$ dür.

	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$	

oluşundan (ve f nin $\frac{4}{\sqrt{3}}$ de sürekli oluşundan) $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ için f nin bu aralıkta maksimum değerine ulaştığı görülür. Bu x değeri için (P nin elipsin üzerinde ve birinci çeyrekte oluşundan) $y = \sqrt{6}$ bulunur.

Sonuç olarak, dikörtgenin boyutları: taban $= 2x = \frac{8}{\sqrt{3}}$, yükseklik $= 2y = 2\sqrt{6}$ dır.