π nin irrasyonel olduğunun ispatı (M. Spivak Calculus TMV yayınları)

Teorem: π^2 (dolayısıyla π de) irrasyoneldir.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ olsun. Bu polinomun şu özellikleri kolayca gösterilir:

1. Her $x \in (0,1)$ için $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ olur.
2. $k > 2n$ veya $0 \leq k < n$ için $f_n^{(k)}(0) = 0$
3. Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_n^{(k)}(0)$ bir tamsayıdır.
4. Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_n^{(k)}(1)$ bir tamsayıdır.

Bunlar dışında bir de aşağıdaki gerçeğe gereksinim duyacağız:

a ne olursa olsun, $\dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{1}{\pi}$ olacak şekilde (a ya bağlı) bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

(Bu gerçek, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ oluşundan kolayca elde edilir.)

$\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$ olduğunu varsayalım.

$$G(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n''''(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right) \tag{1}$$

olarak tanımlayalım.
$\pi^2 = \frac{a}{b}$, (her $k \in \mathbb{N}$ için) $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $G(0), G(1) \in \mathbb{Z}$ olduğu görülür.
Ayrıca

$$G''(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n''''(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)\right) \tag{2}$$

ve $f_n^{(2n+2)}(x) = 0$ olduğundan (1) denkleminin her iki tarafı da π^2 ile çarpılıp (2) denklemi ile taraf tarafa toplanarak

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = a^n \pi^2 f_n(x)$$

elde edilir. Şimdi

$$H(x) = G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x)$$

olarak tanımlayalım. O zaman, (3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x)\cos(\pi x) + G''(x)\sin(\pi x) - \pi G'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 G(x)\sin(\pi x) \\ &= \big(G''(x) + \pi^2 G(x)\big)\sin(\pi x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x) \qquad (3) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdiye kadar yazılanlar her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. n sayısını, $\frac{a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$ olacak şekilde seçelim. Her $x \in (0,1)$ için

$$0 < \pi a^n f_n(x)\sin(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!} < 1 \qquad (4)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} H(1) - H(0) &= G'(1)\sin\pi - \pi G(1)\cos\pi - G'(0)\sin 0 + \pi G(0)\cos 0 \\ &= \pi\,(G(1) + G(0)) \qquad (5) \end{aligned}$$

bulunur. Ortalama Değer Teoreminden

$$H(1) - H(0) = H'(c)(1-0) = \pi^2 a^n f_n(c)\sin(\pi c) \qquad (6)$$

olacak şekilde bir $c \in (0,1)$ sayısı vardır. (5) ve (6) dan

$$G(1) + G(0) = \pi a^n f_n(c)\sin(\pi c)$$

elde edilir. $G(0)$ ve $G(1)$ tamsayı olduğundan $\pi a^n f_n(c)\sin(\pi c)$ de bir tamsayıdır. Diğer taraftan (4) eşitsizliğinden

$$0 < \pi a^n f_n(c)\sin(\pi c) < 1$$

olmalıdır. Bu ise, $\pi a^n f_n(c)\sin(\pi c)$ nin bir tamsayı olması ile çelişir. Öyleyse π^2 nin irrasyonel olduğu, dolayısıyla π nin irrasyonel olduğu ispatlanmış olur.