Teorem 1 ($\frac{0}{0}$ Belirsizlik Durumu için L'Hospital Kuralı) *f ve g, bir (a,b) aralığında türevlenebilen ve her $x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ olacak şekilde fonksiyonlar ve*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \text{ ve } \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$$

olsun. O zaman $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ *olur:*

İspat. Önce, $L \in \mathbb{R}$ durumunu yapalım.
$\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ olduğundan,

$$0 < x - a < \delta \text{ iken } \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. (Gerekirse δ sayısını biraz küçülterek) $(a, a+\delta) \subset (a,b)$ olduğunu varsayabiliriz.

$$0 < x - a < \delta \text{ iken } \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$$

olduğunu göstereceğiz.

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}, \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases} \quad \text{olsun.}$$

Her $x \neq a$ için $F'(x) = f'(x)$ ve $G'(x) = g'(x)$ ve F ve G nin a da sağdan sürekli oldukları aşikardır.
$0 < x - a < \delta$ olsun. F ve G, $[a,x]$ aralığında Cauchy nin Ortalama Değer Teoreminin koşullarını sağlar, dolayısıyla $\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \dfrac{F'(c)}{G'(c)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ olacak şekilde (en az) bir $c \in (a,x)$ vardır. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ olur. Bu nedenle ($0 < c - a < x - a < \delta$ olduğundan)

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon$$

olur.
$L = \pm\infty$ durumunda ispat hemen hemen aynıdır. ■