Bölüm 5

23. $P(x)$ in derecesi 0 ise her noktada hem maksimuma hem de minimuma erişir. $P(x)$ in derecesi n çift ve pozitif olsun. Başkatsayısı pozitif ise $\mathbb{R}$ de bir minimuma erişeceğini ve bir maksimuma erişmeyeceğini göstermek yeterlidir. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ve $a_n > 0$ olsun. $\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$ olduğundan $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}) = +\infty$ olur. Bu nedenle $P(x)$, $\mathbb{R}$ de bir maksimuma erişmez. Aynı zamanda

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{P(\frac{1}{t})} = 0 \text{ ve } 0 \text{ yakınlarında } P(\frac{1}{t}) > 0$$

olur. ($\varepsilon = \frac{1}{|a_0|+1}$ alınarak) limit tanımından

$$0 < |t| < \delta \quad \text{iken} \quad \left|\frac{1}{P(\frac{1}{t})}\right| = \frac{1}{P(\frac{1}{t})} < \varepsilon = \frac{1}{|a_0|+1}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $b = \frac{1}{\delta}$ olsun. Yukarıdaki satırdan

$$|x| > b \quad \text{iken} \quad P(x) > |a_0| + 1 \geq a_0 + 1 > a_0$$

olduğu görülür. $P(x)$, $[-b, b]$ aralığında sürekli olduğundan, Maksimum Minimum teoreminden bir $c \in [-b, b]$ için

$$\text{Her } x \in [-b, b] \text{ için } P(c) \leq P(x)$$

olur. $0 \in [-b, b]$ olduğundan $a_0 = P(0) \geq P(c)$ olduğu görülür. $x \notin [-b, b]$ için $P(x) > a_0$ olduğundan $P(x)$, tüm $\mathbb{R}$ deki minimum değerine c de erişir.

Bölüm 6

28. Bir sonraki problemde $g(x)$ yerine $mx + n$ almak yeterlidir.

29. f ve g, a da sürekli olduğundan $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$, $g(a) = \lim_{x\to a} g(x)$ olur.

$x \neq a$ için $f(x) = \dfrac{f(x) - g(x)}{x - a}(x - a) + g(x)$ olduğundan

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - g(x)}{x - a}(x - a) + g(x)\right) = 0 + g(a) = g(a)$$

(Kısaca: bölümün limiti var ve paydanın limiti 0 olduğundan, payın da limiti 0 olmalıdır) olur. $x \neq a$ için

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(x)-g(x)+g(x)-g(a)}{x-a}=\frac{f(x)-g(x)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

olduğundan

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-g(x)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=0+g'(a)=g'(a)$$

bulunur.

Bölüm 10

5. a)2 kez L'Hospital Kuralı uygulanarak bulunur.
b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=f''(a)$$

olduğunu gösterirsek, L'Hospital Kuralından,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

olur.

$$\begin{aligned}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}&=\frac{f'(a+h)-f'(a)+f'(a)-f'(a-h)}{2h}\\ &=\frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}+\frac{f'(a)-f'(a-h)}{2h}\end{aligned}$$

Türev tanımından

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}=\frac{f''(a)}{2}$$

olur. Değişken değişikliği ($k=-h$) ile

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a)-f'(a-h)}{2h}=\lim_{k\to 0}\frac{f'(a+k)-f'(a)}{2k}=\frac{f''(a)}{2}$$

olur. Limit Teoreminden $\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=f''(a)$ elde edilir.